吉田洋一監修

新数学シリーズ

17

点集合論入門

立教大学名誉教授

吉田洋一著

培風館

まえがき

数学解析は点が‘近くにある’とか‘近づく’とかいうことを基本として組みたてられている学問である．こういうところから，数学解析を学ぶものにとって点集合論についての知識は欠くことのできないものになってくる．この本はこういう知識を得ようと望む人の手引とするために書かれた．

予備知識としては，数列の収束，1変数の函数の連続など，初等的な事がらを必要とするだけで，それ以外のことは知らないでもよめるように書いたつもりである．巻頭に一般集合論についての章をもうけたのも，この配慮からでたものにほかならない．

この本でいう‘点集合’というのは，もっぱら，いわゆるユークリッド空間における点集合のことである．入門書としては，いちおう，これだけで十分と考えられるが，なお，巻末に距離空間・位相空間についての章をつけ加えておくことにした．これは，現代においては，ユークリッド空間の点集合が距離空間ひいては位相空間の特殊の場合と考えられているという事情を考慮したのによるものである．ただし，この最後の章は，いうまでもなく，初学者への手引としての付録的性格のものであって，距離空間論・位相空間論として本格的なものではない．

読者の理解をたすけるよすがとしては，なるべく多くの実例をあげることにつとめた．また，同じ目的のために，ところどころに問をはさんで読者がこれを解くことを求めておいた．これらの問のなかには，定理の性格をもち，のちに引用されるものがあることをことわっておく．問のおもなものには解答あるいはヒントを巻末にかかげてある．

この本をあらわすにあたっては，立教大学教授古屋茂氏，同助教授赤摂也氏から，いろいろ，有益な助言や注意をいただいた．また，財津和子さ

んは校正について骨を折って下さった．さらに，この本の出版にかんしては培風館編集部の野原博氏，森平勇三氏に多大のお世話をかけた．これらの諸氏に対しここで厚くお礼を申し上げておきたい．

1960 年 5 月

吉田洋一

目　　次

VI. 連　結　集　合

VII. 開集合・閉集合の構造

VIII. 距離空間と位相空間

は　じ　め　に

念のため，言葉の説明をここに書くと同時に，本書をよむために必要な予備知識をおさらいしておくことにする.

i)　自然数というのは

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ \nu,\ \cdots\cdots$$

のことである．自然数はまた正の整数とよばれることがある.

ii)　単に整数といえば，0 および正負の整数を意味する．すなわち，

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ \nu,\ \cdots\cdots;\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots,\ -\nu,\ \cdots\cdots$$

iii)　偶数といえば，2 で割り切れる整数を指す:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2\nu,\ \cdots\cdots;\ -2,\ -4,\ -6,\ \cdots\cdots,\ -2\nu,\ \cdots\cdots$$

iv)　奇数といえば，2 で割り切れない整数を指す:

$$1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 2\nu+1,\ \cdots\cdots;\ -1,\ -3,\ -5,\ \cdots\cdots,\ -2\nu-1,\ \cdots\cdots$$

v)　有理数というのは

$$\frac{p}{q}\qquad (p \text{ は整数},\ q \text{ は自然数})$$

の形の数のことである．　0 は有理数である ($p=0$)．　また，どの整数も有理数である ($q=1$).

vi)　無理数というのは，有理数以外の実数のことである:　$\sqrt{2}$，π，e 等.

vii)　列というのは

$$(*)\qquad x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_\nu,\ \cdots\cdots$$

のように，‘もの’に自然数の番号をつけて並べたもののことである．その個々の‘もの’をその列の項という．項が数のときは数列，点のときは点列，集合のときは集合列等の言葉をつかう (集合の意味については I. §2 を参照)．なお，列の項のなかに同じものがたくさんあってもかまわない——つまり，**ちがった番号の項が実は同じものであっても差し支えがない**ことに注意する.

列 ($*$) はまた

$$x_\nu\qquad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

とも略記されることがある.

viii)　列 ($*$) において高高有限個の ν を除き他のすべての ν に対し (すなわち，自然数 ν_0 を適当にとれば $\nu \geqq \nu_0$ なるすべての ν に対し)，x_ν がある与えられた性質をもっているとき，‘**ほとんどすべての**’ x_ν がその性質を有するという．また，どの自然数 ν_0 を与えても，$\nu \geqq \nu_0$ で，しかもある与えられた性質を有する x_ν が存在するときは‘**無限に多くの**’ x_ν がその性質を有するという.

たとえば，(＊)が数列であるとき

$$\lim_{\nu} x_\nu = x_0$$

であるというのは，どんな正数 ε を与えてもある自然数 ν_0 があって，

$$\nu \geqq \nu_0 \quad ならば \quad |x_\nu - x_0| < \varepsilon$$

となることを意味する．これは，いいかえれば，ほとんどすべての x_ν が不等式

$$|x_\nu - x_0| < \varepsilon$$

を満足するということになる．

ix) ν_k $(k=1, 2, \cdots)$ が自然数で，$\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \nu_{k+1} < \cdots$ であるとき，

$$x_{\nu_1},\ x_{\nu_2},\ x_{\nu_3},\ \cdots,\ x_{\nu_k},\ \cdots\cdots$$

を列(＊)の部分列と称する．

I. 集　　合

この章では点集合論を理解するために必要な範囲で一般集合論について簡単にのべる．すでに，一般集合論の知識をもつ読者はここをとばしてもさしつかえない．

§1. 点集合　**点集合**というのは，文字どおり，点の集合――点のあつまりのことである．例をあげよう．

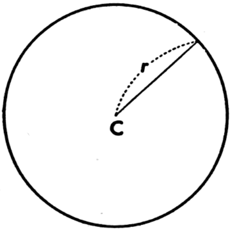
例 1.　平面上の一定点 C を中心とし半径が定正数 r にひとしい円周を K であらわすことにすれば，K は一つの点集合と考えられる．平面上に直交座標を設け，C の座標を $(a,\ b)$ とすれば，K は条件

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

を満足する点 $(x,\ y)$ 全部から成る点集合である．このことを記号

$$K=\{(x,\ y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$$

であらわす．



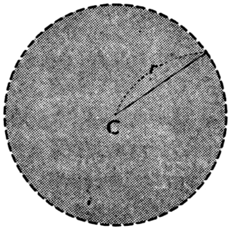
1-1 図

例 2.　円周 K の内部にある点全部から成る点集合．これは条件

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

を満足するすべての点 $(x,\ y)$ から成る点集合ということができる．例 1 にならって，この点集合をつぎの記号であらわす：

$$\{(x,\ y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$$



1-2 図

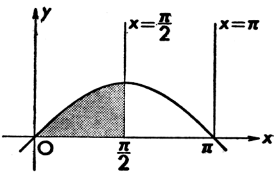
例 3.　条件

$$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq y\leqq\sin x$$

を満足するすべての点 $(x,\ y)$ から成る点集合．記号をもちいればこの点集合はつぎのようにしてあらわされる：

$$\left\{(x,\ y)\mid 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqq y\leqq\sin x\right\}$$

この点集合は，x 軸，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ およびグラフ $y=\sin x$ で囲まれる図形にほかならない．



1-3 図

例 4. 空間において，座標の原点を中心とし半径が1にひとしい球面の上の点全部およびその内部にある点全部から成る点集合．記号をつかえば

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqq 1\}.$$

例 5. 直線上の各点はその座標である実数であらわされる (**数直線**)．$a<b$ であるとき，条件

$$a\leqq x\leqq b$$

を満足する点 x の全部から成る点集合を記号

$$[a\,;b]$$

であらわし，これを左端が a 右端が b の**閉区間**と称する:

$$[a\,;b]=\{x\,|\,a\leqq x\leqq b\}$$

例 6.
$$(a\,;b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

は左端が a 右端が b の**開区間**とよばれる．

例 7. 例5，6にあげた点集合以外に，つぎの点集合がしばしば登場する:

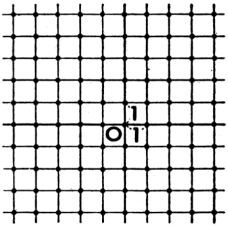
$$[a\,;b)=\{x\,|\,a\leqq x<b\},\qquad (a\,;b]=\{x\,|\,a<x\leqq b\},$$
$$[a\,;+\infty)=\{x\,|\,a\leqq x\},\qquad (a\,;+\infty)=\{x\,|\,a<x\},$$
$$(-\infty\,;a]=\{x\,|\,x\leqq a\},\qquad (-\infty\,;a)=\{x\,|\,x<a\},$$

なお，記号

$$(-\infty,\ +\infty)$$

は実数の全体，いいかえれば，数直線上のすべての点から成る点集合，いわば，数直線そのものをあらわす．

注意 例5，6，7にあらわれた各種の点集合を総称して**区間**という．とくに，例7の $[a\,;+\infty)$ 以下の区間を**無限区間**，それ以外の区間を**有限区間**ということがある．



1–4 図

例 8. 平面上の格子点の集合:

$$\{(x,\ y)\,|\,x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots,\ y=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots\}.$$

格子点とはその座標がいずれも整数であるような点のことである (1–4 図)．

例 9. 平面上の有理点の集合:

$$\left\{\left(\frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'}\right)\middle|\,p=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ p'=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\right.$$
$$\left.q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ q'=1,\ 2,\ 3\cdots\right\}.$$

有理点とは座標がいずれも有理数であるような点である．

問 1. $\{(x,\ y)\,|\,y^2<x\}$ はどういう点集合か．

問 2. $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2<1\}$ はどういう点集合か．

問 3.　平面において第1象限のなかにある点全部から成る点集合を記号であらわす(軸上の点はいれないものとする).

§2. 集　合　前節で点集合をあらわすのにもちいた記号は点集合以外の場合にもひろくもちいられる．たとえば，記号

$$\left\{f \middle| \int_0^1 |f(x)|dx \leq 1\right\}$$

は条件

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq 1$$

を満足するすべての函数 f の集合をあらわす.

いま，‘集合’という言葉をつかったが，**集合**というのは，要するに，ものの集まりのことである．前節でのべた点集合，またいま上にあげた函数の集合など，‘集合’の特殊の場合である．したがって，以下一般の集合についてのべることが，そのまま，点集合にあてはまることはいうまでもない.

この本では，多くの場合，集合をあらわすには，A, B, C, ……, X, Y, Z 等大文字をもちいることにする.

注意 1.　集合というとき，どういう‘もの’がこれに属し，どういう‘もの’がこれに属しないかが確定していなければならない．たとえば，‘座標の原点から遠いところにある点の全部’といったようなものは集合とはいわない．‘遠い’という言葉の意味がはっきりしないので，点 (x, y, z) を任意に与えたとき，これがその‘全部’の一員であるかどうか決定できないからである．これに反して，たとえば r を一定の正数としたとき，‘原点からの距離が r より大きい点 (x, y, z) の全部’といえば，これは一つの集合（点集合）である．この場合には，点 (x, y, z) を任意に与えたとき，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}>r$ であるか，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq r$ であるかによって，点 (x, y, z) がこの‘全部’に属する属しないを決定できるからである.

集合を構成する‘もの’をその集合の**元**(ゲン)という．たとえば，点 $(1, 0)$ は点集合

$$\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$$

の元である．‘もの’ x が集合 A の元であるときは

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x}$$

と書き，x が A の元でないときは

$$\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{A} \not\ni \boldsymbol{x}$$

と書く，たとえば

$$(1,\ 0) \in \{(x,\ y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}, \qquad (1,\ 1) \notin \{(x,\ y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}.$$

集合をあらわす記号としては，前節以来，しばしば

$$\{\ * \mid \sim\sim\sim\sim\ \}$$

という形のものをもちいた．これは条件 ～～～～ を満足するようなもの * の全部から成る集合をあらわす記号である．このほかに，その集合の元を列挙することによって集合をあらわすことがある．たとえば，

$$\{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$$

と書けば，数 1，3，4，7 から成る集合をあらわす．また，

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ \nu,\ \cdots\cdots\}$$

は正の整数全部から成る集合をあらわし，

$$\{2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 2\nu,\ \cdots\cdots\}$$

は正の偶数全部から成る集合をあらわす．

注 意 2. $\{a\}$ と書けば，これはただ一つの元 a から成る集合をあらわす．ただ一つのものを集合という言葉づかいは日常の慣用に反するが，集合論ではそういうものも集合と考えることになっている．

注 意 3. 列挙方式のあらわしかたは，条件方式のあらわしかた $\{\ * \mid \sim\sim\sim\ \}$ に書き直すことができる．たとえば $\{1,\ 3,\ 4\}$ は $\{x \mid x=1$，または $x=3$，または $x=4\}$ と書くこともできるわけである．

注 意 4. 列挙方式の場合 $\{\cdots\}$ のなかに書きならべた記号のなかには同じ元をあらわすものが重複していてもいいことにする．

§3. 部分集合

集合 A, B があって，

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

であるときは

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{B} \supseteq \boldsymbol{A}$$

と書いて，A は B の**部分集合**であるという．

この定義から，ただちに

$$A \subseteq A,$$

すなわち，A 自身 A の部分集合であることがわかる．とくに，

$$A \subseteq B, \quad A \neq B$$

であるときは，

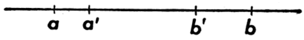
$$\boldsymbol{A \subset B} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{B \supset A}$$

と書き，A は B の**真部分集合**であるという．

例 1.　$\{1, 3, 5, \cdots, 2\nu-1, \cdots\cdots\} \subset \{1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots\cdots\}$

例 2.　$a<a'<b'<b$　ならば

$[a'; b'] \subset (a; b)$



1-5 図

例 3.　平面上の格子点全部の集合，有理点全部の集合をそれぞれ A, B であらわせば，$A \subset B$.

$A \subseteq B$, $B \subseteq A$ のときは，$x \in A$ なら $x \in B$，また $x \in B$ なら $x \in A$．すなわち，A, B は実は同じ元から成る集合である．よって，

$$\boldsymbol{A \subseteq B,\ B \subseteq A} \quad \textbf{ならば} \quad \boldsymbol{A = B}$$

注 意 1.　この定理は $A=B$ であることを示そうとするときしばしばもちいられる定理である．

問 1.　$A \subseteq B$, $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$ であることを証明する．

注 意 2.　$A \subseteq B$, $B \subseteq C$ を $A \subseteq B \subseteq C$ と略記することがある．

問 2.　$A \subseteq B \subseteq C$, $C \subseteq A$ ならば $A=B=C$ であることを証明する．

§4.　集合の結びと交わり

集合 A の元すべてと集合 B の元すべてとから成る集合を記号

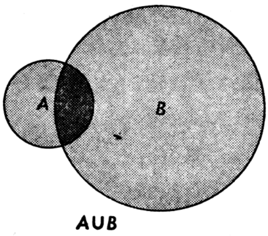
$$\boldsymbol{A \cup B}$$

であらわし，これを A と B との**結び**（または**和集合**）と称する．すなわち，

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

たとえば，$a<a'<b<b'$ であるときは

$$(a; b) \cup (a'; b') = (a; b')$$



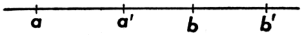
1-6 図

この定義によれば，

(1)　$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$,

(2)　$A \subseteq C$, $B \subseteq C$　ならば

$A \cup B \subseteq C$.



1-7 図

であることは明らかであろう．なお,

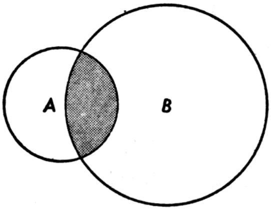
(3)　$A \subseteq B$　ならば　$A \cup B = B$,

また，逆に

(4)　$A \cup B = B$　ならば　$A \subseteq B$

であることに注意する．(4) は (1) から明らかである．(3) の証明はつぎのとおり：まず，$B \subseteq A \cup B$．つぎに，$x \in A \cup B$ ならば $x \in A$ か $x \in B$．もし，$x \in A$ ならば，$A \subseteq B$ から，$x \in B$．よっていずれにしても，$x \in A \cup B$ ならば，$x \in B$．すなわち $A \cup B \subseteq B$．したがって，$A \cup B = B$. (§3，注意 1)

問 1.　$A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ ならば $A \cup B \subseteq A' \cup B'$ であることを証明する．



A∩B

1-8 図

A と B とに共通な元すべてから成る集合を記号

$$A \cap B$$

であらわし，これを A と B との**交わり**（または**共通部分**）と名づける．

$$A \cap B = \{x \mid x \in A,\ x \in B\}.$$

たとえば，$a < a' < b < b'$ ならば

$$(a;\ b) \cap (a';\ b') = (a';\ b)$$

この定義によれば，A と B とが交わらないとき，すなわち共通の元をもたないときは，$A \cap B$ という記号や A と B との交わりという言葉は意味をもたないことになる．しかし，こういう場合には便宜上 $A \cap B$ は元をもたない集合——**空集合**であると考え，このことを等式

$$A \cap B = \theta$$

であらわすことになっている．ここに，θ は空集合をあらわす記号と考えるのである．

空集合 θ は，単に便宜上の産物にすぎず，本来の集合ではない．しかし

これをあたかも集合であるかのように取り扱い，A がどんな集合であっても

$$\theta \subseteq A,\quad \text{とくに}\quad \theta \subseteq \theta$$

であるものと規約する．以上のような規約を設ければ，いつでも

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B,$$

であることがわかる．

注意　A, B が共通点をもつことを $A\cap B\neq\theta$，共通点をもたないことを $A\cap B=\theta$ であらわすことが多い．

なお，

(5)　$A\subseteq B$　ならば　$A\cap B=A$,

逆に

(6)　$A\cap B=A$　ならば　$A\subseteq B$.

問 2.　(5) および (6) を証明する．

問 3.　(3)，(5) をもちいて $A\cup\theta=A$, $A\cap\theta=\theta$ を証明する．

問 4.　$A\subseteq A'$, $B\subseteq B'$ ならば $A\cap B\subseteq A'\cap B'$ であることを証明する．

最後に，B の元であって A の元でないものすべてから成る集合を記号

$$\boldsymbol{B-A}$$

であらわし，これを B と A との**差**と称する：

$$B-A=\{x\,|\,x\notin A,\ x\in B\}$$

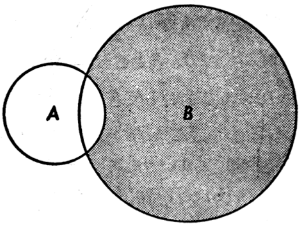
たとえば，　$a<a'<b<b'$　であるときは

$$(a\,;b)-(a'\,;b')=(a\,;\ a'].$$

この定義によれば

$$(7)\begin{cases}\text{i)}\ \boldsymbol{A-A=\theta},\\ \text{ii)}\ \boldsymbol{B-A\subseteq B},\\ \text{iii)}\ \boldsymbol{A\cup(B-A)=A\cup B},\\ \text{iv)}\ \boldsymbol{B-A=(A\cup B)-A}\end{cases}$$

であることに注意する．



B−A

1-9 図

問 5.　(7) をたしかめる．

§5. 集合算　集合の結び，交わりをあらわす記号 $\cup$，$\cap$ を（＋，×のように）演算の記号とみなしたとき，つぎのような演算の規則が成立する．

まず，定義から明らかなように

(1)　$\boldsymbol{A\cup B=B\cup A}$,　$\boldsymbol{A\cap B=B\cap A}$.　　**（交換律）**

つぎに，

(2)　$\boldsymbol{(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)}$,　$\boldsymbol{(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)}$　　**（結合律）**

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ だけを証明しておく．つぎの i)，ii) を証明すればよいわけである：

i)　$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$：$x\in(A\cup B)\cup C$ ならば $x\in A\cup B$ か $x\in C$．しかるに $x\in A\cup B$ ならば $x\in A$ か $x\in B$．結局，$x\in(A\cup B)\cup C$ ならば $x\in A$ か $x\in B$ か $x\in C$．$x\in A$ のときは $x\in A\cup(B\cup C)$．$x\in B$ のときは $x\in B\cup C$ だから $x\in A\cup(B\cup C)$．$x\in C$ のときは $x\in B\cup C$ だから $x\in A\cup(B\cup C)$．いずれにしても，$x\in(A\cup B)\cup C$ ならば $x\in A\cup(B\cup C)$．

ii)　$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$：$x\in A\cup(B\cup C)$ ならば i) と同様にして $x\in A$ か $x\in B$ か $x\in C$．$x\in A$ のときは $x\in A\cup B$ だから $x\in(A\cup B)\cup C$．$x\in B$ のときも同様に $x\in(A\cup B)\cup C$．$x\in C$ のときも $x\in(A\cup B)\cup C$．いずれにしても，$x\in A\cup(B\cup C)$ ならば $x\in(A\cup B)\cup C$．

問 1.　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ を証明する．

注意　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ を簡単に $A\cup B\cup C$ と書く．$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ も $A\cap B\cap C$ と書く．

(3)　$\boldsymbol{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$,
　　$\boldsymbol{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$.　　**（分配律）**

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ だけ証明しておく：

i)　$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$：$x\in A\cap(B\cup C)$ ならば $x\in A$ でしかも $x\in B\cup C$．ゆえに $x\in A$ でしかも $x\in B$ か $x\in C$．$x\in A$, $x\in B$ のときは $x\in A\cap B$ だから $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$．また，$x\in A$, $x\in C$ のときは $x\in A\cap C$ だから $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$．いずれにしても，$x\in A\cap(B\cup C)$

ならば $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ii)　$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$: $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap B$ か $x\in A\cap C$. $x\in A\cap B$ のときは $x\in A$, $x\in B$. したがって $x\in A$, $x\in B\cup C$. ゆえに $x\in A\cap(B\cup C)$. $x\in A\cap C$ のときも同様にして $x\in A\cap(B\cup C)$. いずれにしても, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$.

問 2.　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ を証明する.

なお, §4 でのべた定理をここに再録すれば

(4)　$A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$,　$A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$.

(5)　$A\subseteq B$ ならば $A\cup B=B$.　逆に $A\cup B=B$ ならば $A\subseteq B$.

(6)　$A\subseteq B$ ならば $A\cap B=A$.　逆に $A\cap B=A$ ならば $A\subseteq B$.

3 個の記号 $\cup$, $\cap$ および $-$ をつかえばつぎの等式が成立する.

(7)
$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B),$$
$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B).$$

〔De Morgan (ド・モルガン) の法則〕

最初の等式だけ証明しておく.

i)　$C-(A\cup B)\subseteq(C-A)\cap(C-B)$: $x\in C-(A\cup B)$ ならば $x\in C$ で, しかも $x\notin(A\cup B)$. すなわち $x\in C$, $x\notin A$, $x\notin B$. よって, $x\in C-A$, $x\in C-B$. すなわち, $x\in(C-A)\cap(C-B)$.

ii)　$(C-A)\cap(C-B)\subseteq C-(A\cup B)$: $x\in(C-A)\cap(C-B)$ ならば $x\in C-A$, $x\in C-B$. よって, $x\in C$, $x\notin A$, $x\notin B$. すなわち, $x\in C$, $x\notin A\cup B$. ゆえに $x\in C-(A\cup B)$.

問 3.　$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$ を証明する.

E を一定の集合とし, $X\subseteq E$ なるとき

$$X^c=E-X$$

と書いて, X^c を X の (E に関する) **余集合** (または**補集合**) という.

例 1.　平面全体を E であらわし,　$A=\{(x, y)\mid x^2+y^2<1\}$ とすれば,

$A^c=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\geqq 1\}$

$A\subseteq E,\ B\subseteq E$ であるときは，明らかに

(8)　$\boldsymbol{A\cup A^c=E,\ A\cap A^c=\theta,\ B-A=B\cap A^c.}$

また，(7) により

(9)　$\boldsymbol{(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.}$

(De Morgan の法則)

以上にかかげた演算の規則をつかえば $\subseteq$，$\cup$，$\cap$，$-$ に関するかぎり，集合間の関係は，おおむね，これらから引き出すことができる．

例 2.　$A-B=A-A\cap B$ を証明する：$E=A\cup B$ と考えれば $A-A\cap B=A\cap(A\cap B)^c=A\cap(A^c\cup B^c)=(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)=\theta\cup(A\cap B^c)=A\cap B^c$．よって $A-A\cap B=A\cap B^c=A-B$．

問 4.　$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ とおき $A\triangle B$ を A と B との**対称差**という．$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$ を証明する．

問 5.　$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A$ を証明する（**吸収律**）．

§6.　集合の結びと交わり（つづき）　記号 $\cup$ と $\cap$ とは二つの集合以外の場合にももちいられる．

集合 $A_1,\ A_2,\cdots,A_k$ のいずれかの元であるようなもの全部から成る集合をこれらの集合の結び（和集合）といい，これを記号

(1)　$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$　　または　$\bigcup_{\nu=1}^{k}A_\nu$

であらわす．

また，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k$ のすべてに共通な元全部の集合をこれらの集合の交わり（共通部分）と名づけ，これをつぎの記号であらわす：

(2)　$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$　　または　$\bigcap_{\nu=1}^{k}A_\nu.$

注意 1.　§5 の注意参照．

さらに進んで，集合の列

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\nu,\ \cdots\cdots$$

があるとき，$A_1,\ A_2,\cdots,\ A_\nu,\ \cdots$ のいずれかの元であるようなもの全部から成る集合をこれらの集合の結び（和集合）といい，これをつぎの記号であらわす．

（3）　$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cup \cdots\cdots$　　または　$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$.

また，A_1，A_2，$\cdots$，A_ν，$\cdots$ のすべてに共通な元全部の集合をこれらの集合の交わり（共通部分）と名づけ，これをつぎの記号であらわす．

（4）　$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu \cap \cdots$　　または　$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$.

結びや交わりはもっと広い範囲にわたって考えることができる．まず，例をあげよう．

例　$0<\alpha<1$ であるような α のおのおのについて集合 $\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{2}<x<\alpha+\frac{1}{2}\right\}$ をつくって，これらの集合の少なくとも一つの元であるような数全体からなる集合をつぎの記号であらわす．

$$\bigcup_{0<\alpha<1}\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{2}<x<\alpha+\frac{1}{2}\right\}$$

または

$$\bigcup_{\alpha\in(0;1)}\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{2}<x<\alpha+\frac{1}{2}\right\}.$$

これが，実は，$\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$ であることは明らかであろう．また，$\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{2}<x<\alpha+\frac{1}{2}\right\}$ のすべてに共通な数全部から成る集合をつぎの記号であらわす．

$$\bigcap_{0<\alpha<1}\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{2}<x<\alpha+\frac{1}{2}\right\}$$

または

$$\bigcap_{\alpha\in(0;1)}\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{2}<x<\alpha+\frac{1}{2}\right\}$$

これは，実は，$\left\{\frac{1}{2}\right\}$ にほかならない．

上例と同様のことを一般的にのべれば，すなわち，つぎのようになる：

ここに一つの集合 M があって，その元を代表的に α であらわしたとき，α のおのおのに対し一つの集合 A_α が与えられているとする．このとき A_α のいずれかに属する元すべてから成る集合をすべての A_α の**結び（和集合）**といい，これをつぎの記号であらわす．

（5）　$$\bigcup_{\alpha\in M} A_\alpha.$$

また，すべての A_α の**交わり（共通部分）**

（6）　$$\bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha$$

はあらゆる A_α に共通な元全部の集合として定義される．

注意 2. (1), (2) は (5), (6) において $M=\{1, 2, \cdots, k\}$ としたものにあたる. また, (3), (4) は (5), (6) において $M=\{1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots\}$ としたものにあたる.

このように $\cup$, $\cap$ の意味をひろく使った場合にも, §4 におけると同様に, つぎの公式が成り立つ. 証明は容易であろう.

$$A\cup(\textstyle\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in M}(A\cup A_\alpha),\qquad\text{(分配律)}$$
$$A\cap(\textstyle\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in M}(A\cap A_\alpha)$$

$$(7)\quad A-\textstyle\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in M}(A-A_\alpha),\qquad \text{(De Morgan の法則)}$$
$$A-\textstyle\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in M}(A-A_\alpha).$$

とくに, A_α のすべてが一定の集合 E の部分集合であるとし, $X\subseteq E$ なるとき, 前と同くじ $X^c=E-X$ と書くことにすれば,

$$(8)\quad (\textstyle\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha{}^c,\qquad \text{(De Morgan の法則)}$$
$$(\textstyle\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha{}^c$$

問 $\bigcup_{0<\alpha<1}\left(-\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)$ および $\bigcap_{0<\alpha<1}\left(-\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)$ を求める.

§7. 極限集合

集合の列

$$(1)\qquad A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\nu,\ \cdots\cdots$$

があるとき,

$$\overline{\lim_\nu}\,A_\nu=\textstyle\bigcap_{i=1}^\infty(\bigcup_{j=1}^\infty A_{i+j-1}),\quad \underline{\lim_\nu}\,A_\nu=\bigcup_{i=1}^\infty(\bigcap_{j=1}^\infty A_{i+j-1})$$

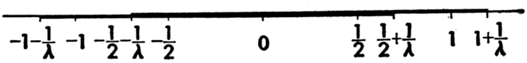
とおいて, $\overline{\lim_\nu}\,A_\nu$ を集合列 (1) の**最大極限集合**, $\underline{\lim_\nu}$ を**最小極限集合**と名づける. 定義からわかるように

$$(2)\qquad \underline{\lim_\nu}\,A_\nu\subseteq\overline{\lim_\nu}\,A_\nu.$$

問 1. (2) をたしかめる.

例 1. $A_{2\lambda-1}=\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda};\ 1+\frac{1}{\lambda}\right]$, $A_{2\lambda}=\left[-1-\frac{1}{\lambda};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right]$

$(\lambda=1, 2, \cdots)$ とすれば



I-10 図

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2\lambda-1+j-1}=\left[-1-\frac{1}{\lambda}\,;\ 1+\frac{1}{\lambda}\right],$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2\lambda+j-1}=\left[-1-\frac{1}{\lambda}\,;\ 1+\frac{1}{\lambda+1}\right]$$
$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{i+j-1}=\left[-\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right]$$

だから

$$\overline{\lim_{\nu}}\, A_\nu=[-1\,;\,1],\quad \underline{\lim_{\nu}}\, A_\nu=\left[-\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right].$$

一般に，$x\in\overline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$ ならば i がいかに大きくとも $x\in\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}$. ゆえに $i\leqq\nu$, $x\in A_\nu$ なる A_ν がかならずある．したがって，x は無限に多くの A_ν の元でなければならない．逆に x が無限に多くの A_ν の元ならば，i がどんな正整数でも $i\leqq\nu$, $x\in A_\nu$ なる A_ν があるのだから，$x\in\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}$. ゆえに $x\in\overline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$. すなわち，$\overline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$ は無限に多くの A_ν の元であるようなもの全部の集合である．

また，$x\in\underline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$ ならば，ある i_0 に対して $x\in\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{i_0+j-1}$. よって，$\nu\geqq i_0$ ならば $x\in A_\nu$. ゆえに，x は A_1, A_2, …, A_{i_0-1} を除けばすべての A_ν の元である．いいかえれば有限個の A_ν を除けばすべての A_ν の元である．逆に x が有限の A_ν を除いてすべての A_ν の元であるとする． 除外される A_ν のうち番号のもっとも大きいものを A_{i_0-1} とすると，$\nu\geqq i_0$ ならば $x\in A_\nu$. ゆえに $x\in\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{i_0+j-1}$. よって $x\in\underline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$. すなわち，$\underline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$ はほとんどすべて（'はじめに' viii) 参照）の A_ν の元であるようなもの全部から成る集合である．

注 意 x が有限個の A_ν をのぞいて他のすべての A_ν の元ならば，x は，もとより，無限に多くの A_ν の元である．このことからも（2）がたしかめられる．

問 2. $A_\nu=A$ $(\nu=1,2,\cdots)$ であるとき，$\overline{\lim_{\nu}}\,A_\nu=A$, $\underline{\lim_{\nu}}\,A_\nu=A$ をたしかめる．

とくに

$$\underline{\lim_{\nu}}\,A_\nu=\overline{\lim_{\nu}}\,A_\nu$$

であるとき，この一致した集合を集合列（1）の**極限集合**といい，これをつぎの記号であらわす．

$$\lim_{\nu} A_\nu$$

例 2. $A_\nu\subseteqq A_{\nu+1}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ なるときは，i が何であっても $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$. ゆえに $\overline{\lim_{\nu}}\,A_\nu=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, また，$\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}=A_i$. ゆえに $\underline{\lim_{\nu}}\,A_\nu=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, よって $\lim_{\nu}A_\nu=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

問 3. $A_\nu \supseteq A_{\nu+1}$ $(\nu=1, 2, \cdots\cdots)$ なるときは$\lim_{\nu} A_\nu = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ であることを証明する.

§8. 写 像 集合 A の元のおのおのに対し集合 B の元 $y=f(x)$ が与えられているとき，A から B の**中への写像** f (または $y=f(x)$) が定義されているという．このとき B は A と同じ集合であってもかまわない.

A の元 x が与えられたとき，$f(x)$ は写像 f による元 x の**像**とよばれる．$A' \subseteq A$ のとき

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$$

とおいて，$f(A')$ を写像 f による A' の**像**という．$f(A')$ は A' の元の (f による) 像すべての集合であって，もとより，$f(A') \subseteq B$ である.

f が A から B の中への写像であるとき，とくに，$f(A)=B$ ならば，f は A から B の**上への写像**であるといわれる.

例 1. $\sin x$ は $A=(-\infty\,;+\infty)$ から $A=(-\infty\,;+\infty)$ の中への写像である．また，$A=(-\infty\,;+\infty)$ から $B=[-1\,;1]$ の上への写像である．また，$\sin\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0\,;1]$

例 2. $N=\{1,2,3,4,\cdots,\nu,\cdots\cdots\}$, $N'=\{2, 4, 6, \cdots, 2\nu, \cdots\cdots\}$ とおくとき，$y=2x$ は N から N の中への写像である．この写像を f であらわせば $f(N)=N'$. f はまた N から N' の上への写像とも考えられる.

$$f^{-1}(y) = \{x \mid x \in A,\ f(x)=y\}$$

とおき，これを B の元 y の f による**原像**という.

注意 1. $y \notin f(A)$ のときは $f^{-1}(y)=\theta$ である.

また，$B' \subseteq B$ のとき

$$f^{-1}(B') = \{x \mid x \in A,\ f(x) \in B'\}$$

とおき，これを f による B' の**原像**という.

注意 2. $B' \subseteq f(A)$ でなくても $f^{-1}(B')$ を考える．とくに，$B' \cap f(A)=\theta$ のときは，$f^{-1}(B')=\theta$.

f が A から B の中への写像，g が B から C の中への写像であるとき，A の元 x に $g(f(x))$ を対応させる A から C への写像を $g\circ f$ であらわし，これ

を f と g との合成写像という.

写像 f において，とくに

$$\text{i)}\quad f(A)=B,\qquad \text{ii)}\quad x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1)\neq f(x_2)$$

であるとき，f は A から B への1対1の写像であるという.

例 3. $y=e^x$ は $(-\infty;\ +\infty)$ から $(0;\ +\infty)$ への1対1の写像である.

問 1. $y=\dfrac{x}{1+|x|}$ は $(-\infty;\ +\infty)$ から $(-1;1)$ への1対1写像であることを証明する.

問 2. 例2の写像 f は N から N' への1対1写像であることをたしかめる.

A から B への1対1の写像が存在するとき，**A は B に対等**であるといい，

$$A\sim B$$

と書く. 記号～についてはつぎの定理が成り立つ：

i)	$\boldsymbol{A\sim A}$	**(反射律)**
ii)	$\boldsymbol{A\sim B}$ **ならば** $\boldsymbol{B\sim A}$	**(対称律)**
iii)	$\boldsymbol{A\sim B,\ B\sim C}$ **ならば** $\boldsymbol{A\sim C}$	**(推移律)**

[証 明] i) $y=x$ なる写像は1対1写像である. ii) $y\in B$ のとき $f^{-1}(y)$ は A のただ一つの元から成るから，y にそのただ一つの元を対応させる写像を f^{-1} であらわせば，f^{-1} は B から A への1対1写像である. iii) f_1 を A から B への，f_2 を B から C への1対1写像とするとき，A の元 x に C の元 $f_2(f_1(x))$ を対応させる写像 $f=f_2\circ f_1$ は A から C への1対1写像である. というのは，まず，$z\in C$ とすれば，$f_2(B)=C$ なのだから，$f_2(y)=z$ なる B の元 y があり，$f_1(A)=B$ なのだから，$f_1(x)=y$ なる A の元 x がある. ゆえに $f(x)=z$ なる A の元 x があることになり，$f(A)=C$. つぎに，$x_1\neq x_2$ ならば $f_1(x_1)\neq f_1(x_2)$，よって $f_2(f_1(x_1))\neq f_2(f_1(x_2))$，すなわち，$f(x_1)\neq f(x_2)$.

注意 3. 対称律により，$A\sim B$ なるとき，$B\sim A$ だから，'A は B に対等' というかわりに，'**A と B とは対等**' ということがある.

$A\sim B$ のとき，A と B とは同じ**濃度**をもつという.

問 3. 任意の開区間 $(a;\ b)$ は開区間 $(0;\ 1)$ と対等であることを証明する.

注意 4. 問1, 問3および推移律によって, $(-\infty;\ +\infty)$ は開区間 $(0;\ 1)$ と対等であるわけである.

§9. 可付番集合 3個の相ことなるもの $a,\ b,\ c$ から成る集合 $\{a,\ b,\ c\}$ は集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$ と対等である. $f(1)=a,\ f(2)=b,\ f(3)=c$ なる写像 f によって $\{a,\ b,\ c\}\sim\{1,\ 2,\ 3\}$ だからである.

一般に自然数 k を適当にえらべば

$$A\sim\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$$

であるとき, A は**有限集合**であるという. このとき, $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k\}$ から A への1対1写像を f とし, $a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ \cdots\cdots,\ a_k=f(k)$ とおけば, $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}$. すなわち, A の各元に $1,\ 2,\ \cdots,\ k$ という番号がつけられるわけである.

注意 1. 空集合 θ も有限集合と考えることに規約する.

有限でない集合を**無限集合**という.

とくに,

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \nu,\ \cdots\}$$

とおいて (すなわち, 正整数すべてから成る集合を N であらわすこととして),

$$A\sim N$$

なるとき, A は**可付番無限集合**であるという.

$N\sim A,\ A\sim B$ ならば, 推移律により, $N\sim B$ であるから, 可付番無限集合に対等な集合は可付番無限集合である.

例 1. $N\sim N$ であるから N は可付番無限集合である.

例 2. 写像 $y=2x$ により $N\sim\{2,\ 4,\ \cdots,\ 2\nu,\ \cdots\}$. すなわち, すべての正偶数から成る集合は可付番無限集合である.

問 1. つぎの集合はそれぞれ可付番無限集合であることを証明する.

i) すべての正奇数から成る集合 $\{1, 3, 5, \cdots, 2\nu-1, \cdots\cdots\}$, ii) $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu,\ \cdots\cdots\}$, iii) すべての整数から成る集合 $\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2, \cdots,\ \nu,\ -\nu, \cdots\cdots\}$.

A が可付番無限集合であるとき, f を N から A への1対1写像とし,

(1) $f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ \cdots,\ f(\nu)=a_\nu,\ \cdots\cdots$

とおけば

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_\nu,\ \cdots\cdots\}.$$

すなわち，A の各元に 1, 2, …, ν, … という番号をつけて，ちがった番号のついた元は相ことなるようにできるわけである．また，与えられた集合 A のすべての元に a_ν のように番号（ただし，ちがう番号にはちがう元）がつけられるときは，（1）によって写像 f を定義すれば f により $N\sim A$ となるから，A は可付番無限集合である．

有限集合と可付番無限集合とを総称して**可付番集合**という．

***A* が可付番集合ならば *N* から *A* の上への写像が存在する．**

［証明］ A が可付番無限集合のときは定義から明らかである．A が有限集合であるとき，たとえば $A=\{a,\ b,\ c\}$ であるとき，

$f(1)=a,\ f(2)=b,\ f(3)=c;\ f(4)=a,\ f(5)=b,\ f(6)=c;\ f(7)=a,\ \cdots$
$\cdots f(3\nu)=c;\ f(3\nu+1)=a,\ f(3\nu+2)=b,\ \cdots\cdots$

によって写像 f を定義すれば，f は N から A の上への写像である．逆に，

***N* から *A* の上への写像が存在すれば *A* は可付番集合である．**

［証明］ A が有限集合のときは，定義により，可付番集合なのだから，A が無限集合のときだけを考える．N から A の上への写像を f とし，まず，1 を ν_1 と書いて， $\varphi(1)=f(\nu_1)$ とおき，

$$x>1,\ f(x)\neq\varphi(1)$$

なる最小の自然数 x を ν_2 であらわす．すなわち，

$$\nu_2=\min\{x\,|\,x>\nu_1,\ f(x)\neq\varphi(1)\}^{*}$$

とおく．この ν_2 をもちいて，$\varphi(2)=f(\nu_2)$ とし，

$$\nu_3=\min\{x\,|\,x>\nu_2,\ f(x)\neq\varphi(1),\ f(x)\neq\varphi(2)\}$$

とおいて，$\varphi(3)=f(\nu_3)$ とする．この手続をくりかえして，$\varphi(1)=f(\nu_1)$, $\varphi(2)=f(\nu_2)$, ……, $\varphi(\lambda)=f(\nu_\lambda)$ が定まり，$f(1)$ から $f(\nu_\lambda)$ まではいずれも $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, …, $\varphi(\lambda)$ の一つとしてすでに登録ずみになったものとし，ここに

$$\nu_{\lambda+1}=\min\{x\,|\,x>\nu_\lambda,\ f(x)\neq\varphi(1),\ f(x)\neq\varphi(2),\ \cdots,\ f(x)\neq\varphi(\lambda)\}$$

---

* min は最小のものをあらわす記号．

とおいて，$\varphi(\lambda+1)=f(\nu_{\lambda+1})$ と定める．この手続をかぎりなくつづければ，$\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_\lambda<\nu_{\lambda+1}\cdots$だから，$A$ のどの元 $f(\nu)$ もいつかは $\varphi(\lambda)$ の一つとしてちょうど一度登録されるわけである．よって φ は N から A への 1 対 1 の写像である．すなわち，$N\sim A$.

いまのべた二つの定理の結果をひらたくいえばつぎのごとくなる:

A が可付番集合であるとは A のすべての元をもちいて

(2) $a_1,\ a_2\cdots,\ a_\nu,\ \cdots\cdots$

なる列をつくり得ることである．

N から A の上への写像を f とし，$a_\nu=f(\nu)$ とおけばよい．

注 意 2. ‘可付番’というのは‘番号がつけられる’という意味である．上の定理からこの名の由来が知られるであろう．なお，列というとき，同じ元が何度もあらわれてもいいことに注意する（‘はじめに’ iiv）参照).

例 3. $A,\ B$ が可付番集合ならば $A\cup B$ も可付番集合である．

［証 明］（2）が A の元すべてをもちいた列，$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_\nu,\ \cdots\cdots$が B の元すべてをもちいた列であるとし，$c_1=a_1,\ c_2=b_1,\ c_3=a_2,\ c_4=b_2,\ \cdots c_{2\nu-1}=a_\nu,\ c_{2\nu}=b_\nu,\ \cdots\cdots$ とおけば $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_\lambda,\ \cdots\cdots$は $A\cup B$ の元すべてをもちいてつくった列になっている．

問 2. A が可付番集合ならばその部分集合も可付番集合であることを証明する．

注 意 3. 問 2 により，A が可付番でないことをいうのには A が可付番でない部分集合をもつことを示せばよいわけである．

集合列 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\lambda,\ \cdots\cdots$ において A_λ のおのおのが可付番集合ならば $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ も可付番集合である．

［証 明］ f_1 を N から A_1 の上への写像，f_2 を N から A_2 の上への写像，$\cdots\cdots$，f_λ を N から A_λ の上への写像，$\cdots$とすれば，$\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ の元は

(3) $f_\lambda(x)\quad(\lambda=1,\ 2,\ \cdots;\ x=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

のどれかであるはずである．（いくつかの $f_\lambda(x)$ が同じ元をあらわすこともありうる．）（3）を

$f_1(1)$; $f_1(2),\ f_2(1)$; $f_1(3),\ f_2(2),\ f_3(1)$; $f_1(4),\ f_2(3),\ f_3(2),\ f_4(1)$; $\cdots$

のように（$\lambda+x$ の大きさの順に，$\lambda+x$ がひとしい $f_\lambda(x)$ については λ の大きさの順に）書きならべ，順々に $f(1)=f_1(1)$; $f(2)=f_1(2),\ f(3)=f_2(1)$;

$f(4)=f_1(3)$, …… というようにして，f を定めてゆけば，ここに N から $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ の上への写像 f が得られたことになる．

少しくわしくいうと： $\lambda+x=2$ の $f_\lambda(x)$ は 1 個，$\lambda+x=3$ の $f_\lambda(x)$ は 2 個，$\lambda+x=4$ の $f_\lambda(x)$ は 3 個，…，$\lambda+x=m$ の $f_\lambda(x)$ は $m-1$ 個だから，$\lambda+x<m$ なる $f_\lambda(x)$ は $1+2+\cdots+(m-2)=\dfrac{(m-2)(m-1)}{2}$ 個ある． そこで，$\lambda+x=m$ ならば，$\dfrac{(m-2)(m-1)}{2}+\lambda=\nu$ とおき $f(\nu)=f_\lambda(x)$ として $f(\nu)$ を定めるというのが上にのべた f の定め方である．なお，念のため，逆に正整数 ν を与えたとき，$f(\nu)=f_\lambda(x)$ なる λ, x を求めるには，

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}<\nu\leq\frac{(m-1)m}{2}$$

なる正整数 m を求め，$\lambda=\nu-\dfrac{(m-2)(m-1)}{2}$, $x=m-\lambda$ とすればよいことを付記しておく．

例 4. A, B, C がいずれも可付番集合ならば，$A_1=A$, $A_2=B$, $A_3=C$, $A_4=A$, $A_5=B$, $A_6=C$……とおいてみれば $A\cup B\cup C=\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ だから，$A\cup B\cup C$ も可付番集合である．

注意 4. 例 3 の証明も例 4 と同様にしてもできることはいうまでもない．また，例 3 をつかって例 4 を証明することも可能である．

例 5. λ, μ は自然数であるとし， $A_1=\left\{\dfrac{1}{1},\ \dfrac{2}{1},\ \cdots,\ \dfrac{\mu}{1},\ \cdots\cdots\right\}$,

$$A_2=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \cdots,\ \frac{\mu}{2},\cdots\cdots\right\},\ A_3=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \cdots,\ \frac{\mu}{3},\cdots\cdots\right\},\ \cdots\cdots,$$

$$A_\lambda=\left\{\frac{1}{\lambda},\ \frac{2}{\lambda},\ \cdots,\ \frac{\mu}{\lambda},\cdots\cdots\right\},\ \cdots\cdots$$

とおけば，A_1, A_2, …, A_λ, …… はいずれも可付番集合である．ゆえに $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ も可付番集合である． これはすべての正有理数の集合は可付番集合であることを意味する． 負の有理数すべてから成る集合は $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ と（写像 $y=-x$ によって）対等であるから，これもまた可付番集合である． よって，これら二つの集合と可付番集合 $\{0\}$ との結び，すなわち，すべての有理数の集合は，例 4 により，可付番である．

問 3. 平面上の格子点（§1，例 8）の集合は可付番集合であることを証明する．

問 4. 平面上の有理点（§1，例 9）全部の集合，空間の有理点全部の集合はそれぞれ可付番集合であることを証明する．

注意 5. 可付番無限集合の濃度は記号 a または $\aleph_0$ であらわす習慣になってい

る．ここに $\aleph$ はヘブライ語の第 1 字母で‘アレフ’とよむ．したがって，$\aleph_0$ はアレフ・ゼロとよむわけである．

§ 10.　可付番でない集合　前節で可付番無限集合というものが登場したが，こういう言葉がつかわれるのは，無限集合のなかには，じっさい，可付番集合でないもの——$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ \nu,\ \cdots\cdots\}$ と対等でない集合が存在するからにほかならない．以下に，可付番でない集合の実例をいくつか挙げてみることにする．

実例にとりかかるに先だって，つぎの 1)，2)，3) に注意しておく．

1)　無限集合 A が可付番でないこと，いいかえれば，$N\sim A$ でないことを示すのには，f が N から A の中へのどんな写像であっても，f は A の上への写像でないこと，すなわち，$f(N)\neq A$ であることを示せばよい．このためには，$A-f(N)\neq\theta$ であること，いいかえれば，$a\in A-f(N)$ なる元 a が存在することをいいさえすれば十分なわけである．

2)　A が可付番でない集合で，$A\sim B$ ならば B も可付番でない集合である．なぜならば，もし $B\sim N$ であるときは，推移律によって，$A\sim N$ となり，A が可付番でないという仮設にそむくからである．

3)　A のある部分集合 A' が可付番でないならば，A も可付番ではない．なぜならば，もし A が可付番ならばその部分集合 A' も可付番であるはずだからである．(§ 9，問 2)

例 1.　$(0;\ 1]=\{x\,|\,0<x\leqq 1\}$：この集合の各元は 1 より大きくない正数だから，いずれも，小数の形にあらわすことができる．たとえば，

$$1=0.999999\cdots\cdots,\quad \frac{1}{3}=0.333333\cdots\cdots,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}=0.707106\cdots\cdots.$$

ただし，たとえば，1/4 をあらわす小数には，つぎのように，二つの形がある．

$$1/4=0.250000\cdots\cdots=0.249999\cdots\cdots$$

ここでは，前の方の，ある桁（けた）からさき 0 ばかりがつゞく形は避けて，後の方の，9 がつゞく形の方を採用することにきめておく．こういう規約を設ければ，$(0;\ 1]$ の各元 x をあらわす小数はそれぞれ一通りに定まることになってくる．

そう規約した上で，いま，f は N から $(0;\ 1]$ の中への任意の写像であるとし，

$$f(1)=0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1\nu}\cdots\cdots$$
$$f(2)=0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2\nu}\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(\nu)=0.\,a_{\nu 1}a_{\nu 2}a_{\nu 3}\cdots a_{\nu\nu}\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

であるとする．(ここに，$a_{\nu k}$ $(\nu=1,\ 2,\ \cdots;\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が，それぞれ，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれかであることはいうまでもない．) $(0;\ 1]$ の元で，どの $f(\nu)$ とも一致しない正数 a があることが示されれば，$a\in(0;\ 1]-f(N)$ だから，それで，$(0;\ 1]$ の可付番でないことがわかるわけである．

そういう a はつぎのようにして求められる: $a_{\nu\nu}(\nu=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のおのおのについて，

$$a_{\nu\nu}=5 \text{ ならば } a_\nu=1,\quad a_{\nu\nu}\neq 5 \text{ ならば } a_\nu=5$$

とおいて，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\nu,\ \cdots\cdots$を定め，

$$a=0.\,a_1a_2a_3\cdots a_\nu\cdots\cdots$$

という小数 a をつくってみる．$0<a\leqq 1$ であることは明らかであろう．すなわち，$a\in(0;1]$．また，$a_1\neq a_{11}$ だから，$a\neq f(1)$，$a_2\neq a_{22}$ だから $a\neq f(2)$，一般に $a_\nu\neq a_{\nu\nu}$ だから $a\neq f(\nu)$，$\cdots\cdots$．すなわち，a はどの $f(\nu)$ とも一致しないことが示されたわけである．

注意 1.　上のような議論のしかたを**対角線論法**ということがある．

注意 2.　$(0;\ 1]$ の濃度は c または $\aleph$ であらわされるのが習慣である．

例 1 において，小数が出てきたが，あとのために，これについて少し説明を与えておく: 一般に

$$0.\,a_1a_2\cdots a_\nu\cdots\cdots\quad (a_\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9)$$

という小数は，じつは，級数

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots\cdots$$

を略記したものである．すなわち，これは 1 より大きくない正数の 10 進法展開というべきものなのであるが，そういう正数 x をあらわすのには，この 10 進法展開以外にも，2 以上の任意の自然数 p をとって，**p 進法展開**なるものがもちいられることがある:

$$x=\frac{\alpha_1}{p}+\frac{\alpha_2}{p^2}+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{p^\nu}+\cdots\cdots\quad (\alpha_\nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1)$$

すなわち，10 進法展開と同じように，$0<x\leqq 1$ なるどんな x を与えても，x は上のような級数であらわし得るのである．$p=2$ および $p=3$ の場合，いいかえれば，2 進法展開および 3 進法展開の例をあげれば，

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots,\quad \frac{1}{3}=\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots,$$
$$1=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{0}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\cdots\cdots.$$

なお，たとえば，

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{0}{3^4}+\cdots\cdots=\frac{2}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots\cdots$$

などのように，二通りの形がある場合には，つぎの例 2 では 0 がずっとつづいて行く方の形は避けて，各項の分子のなかに 0 でないものが無数にある方の形を採用することに規約しておく．

例 2. $\{(x,\ y)\,|\,0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq 1\}$: 簡単のため，この集合を A であらわすこととすれば，$(0;\ 1]\sim A$ である．したがって，例 1 により，A は可付番でない集合であるということになる．

［証 明］ $t\in(0;\ 1]$ なる任意の t をとり，これの 2 進法展開を

$$(1)\quad t=\frac{1}{2^{t_1}}+\frac{1}{2^{t_1+t_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{t_1+t_2+\cdots+t_\nu}}+\cdots\cdots$$

であるとする．これは，展開の各項のうち，分子が 0 にひとしいものは書かないで，残りの項だけを書いたものである．いちいち，上の形で書くのはわずらわしいので，ここでは，(1) を

$$t=[t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots,\ t_\nu,\ \cdots\cdots]$$

と略記することにする．

$$x=[t_1,\ t_3,\ t_5,\ \cdots,\ t_{2\nu-1},\ \cdots\cdots],\ y=[t_2,\ t_4,\ t_6,\ \cdots,\ t_{2\nu},\ \cdots\cdots]$$

とおき，

$$(x,\ y)=f(t)$$

と書くことにすれば，$(x,\ y)\in A$ であるから，ここに，$(0,\ 1]$ から A の中への写像 f が得られたことになる．

$t_1\in(0;1]$, $t_2\in(0;1]$, $t_1\neq t_2$ ならば $f(t_1)\neq f(t_2)$ であることは明らかであろう．

今度は，逆に，$(x,\ y)\in A$ なる任意の $(x,\ y)$ をとって

$$x=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_\nu,\ \cdots\cdots],\ y=[y_1,\ y_2,\cdots,\ y_\nu,\ \cdots\cdots]$$

であるとし，

$$t=[x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \cdots,\ x_\nu,\ y_\nu,\ \cdots\cdots]$$

とおいてみれば，$(x,\ y)=f(t)$ であることは，ただちに，見てとることができる．これは $f((0;\ 1])=A$ であることを意味するから，これで f が $(0;\ 1]$ から A への 1 対 1 写像であることがわかる．

注 意 3. 実は $[0;\ 1]\sim\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ であることも証明できるのである (V. §6).

例 3. $(0;\ 1]$ を定義域とするあらゆる函数の集合: この集合を F であらわすと，

F が可付番でないことは，つぎのようにして，すぐわかる．すなわち，$(0;\ 1]$ において $f(x)\equiv c$ (c は定数，$0<c\leqq 1$) なる函数 f を f_c であらわすこととし，$F'=\{f_t|0<t\leqq 1\}$ とおけば，明らかに $F'\subseteq F$．また，f_t に t を対応させる写像 φ，いいかえれば $\varphi(f_t)=t$ なる写像 φ は F' から $(0;\ 1]$ への1対1写像であるから，$F'\sim(0;\ 1]$．こうして，F の部分集合 F' が可付番でない集合 $(0;\ 1]$ と対等なことが示されたから，F 自身も可付番ではないことがわかった．

ついでに，F は $(0;\ 1]$ と対等でないことを示しておこう．$(0;\ 1]$ から F の中への任意の写像を ψ とし，便宜上 $\psi(t)$ のあらわす F の元を ψ_t と書くことにする．ここで，$0<t\leqq 1$ なる t のおのおのについて

$$\chi(t)=\psi_t(t)+1$$

とおいて函数 χ を定義すれば，$\chi\in F$ で，しかも定義から明らかなように，この函数 χ はどの ψ_t とも一致し得ない．($\chi=\psi_t$ ならば $\chi(t)=\psi_t(t)$，すなわち，$\psi_t(t)+1=\psi_t(t)$ となる．) すなわち，$\chi\,\bar{\in}\,\psi([0;\ 1])$，いいかえれば $F-\psi((0;\ 1])\neq\theta$．ゆえに，$\psi((0;\ 1])\neq F$.

注意 4. このあとの方の論法は例1のときの論法と似ていることに注意する．やはり，対角線論法とよばれる．

注意 5. F が $(0;\ 1]$ と対等でなく，しかも $(0;\ 1]$ と対等な部分集合を有するところから，F の濃度 $\mathfrak{f}$ は $(0;\ 1]$ の濃度 $\aleph$ より大きいといわれる: $\mathfrak{f}>\aleph$．同様の意味で，$\aleph>\aleph_0$ である．

以上によって，可付番でない無限集合のあることがわかったが，一般に無限集合についてはつぎのような定理がある:

無限集合の部分集合のなかには可付番無限集合であるものが，かならず，存在する．

[証 明] A は無限集合であるとし，まず，その元を一つとり出してこれを a_1 であらわす．つぎに，$A-\{a_1\}$ の元を一つとり出して，これを a_2 であらわし，さらにまた，$A-\{a_1,\ a_2\}$ から元を一つとり出してこれを a_3 であらわす．以下，つぎつぎと，こういう手続をかぎりなくつづけることにより，

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\nu,\ \cdots\cdots$$

が得られたものとし，

$$A'=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\nu,\ \cdots\cdots\}$$

とおけば，$A'\subseteq A$，$A'\sim N$ であることはいうまでもないであろう．

この定理をつかうとつぎの定理を証明することができる:

i) A が無限集合，B が可付番集合であるときは $A\cup B\sim A$.

ii) とくに，A が可付番でない場合には，$A-B\sim A$.

[証 明] i) $A'\subseteq A$ で A' は可付番無限集合であるとすれば，$A'\cup B$ も可付番無限集合であるから（§9，例3)，$A'\cup B\sim A'$．よって，f をA' から $A'\cup B$ への 1 対 1 の写像とし，

$$x\in A' \quad ならば \quad \varphi(x)=f(x),$$
$$x\in A-A' \quad ならば \quad \varphi(x)=x$$

と定めれば，ここに，A から $(A'\cup B)\cup(A-A')=A\cup B$ への 1 対 1 の写像 φ が得られたことになる．すなわち，$A\sim A\cup B$.

ii) $B'=A\cap B$ とおけば B' は可付番集合で(§9，問2)，$A-B=A-B'$ である．ところで，$A-B=A-B'$ がもし有限集合ならば，$A=(A-B')\cup B'$ も可付番集合であることになり，仮設にそむくから，$A-B'$ は無限集合である．よって，i)により，$(A-B')\cup B'\sim A-B'$，すなわち $A\sim A-B$.

例 4. $[0;1]=(0;1]\cup\{0\}$ であるから $[0;1]\sim(0;1]$．また，$(0;1)=(0;1]-\{1\}$ だから $(0;1)\sim(0;1]$．また，$[0;1)=(0;1)\cup\{0\}\sim(0;1)\cup\{1\}=(0;1]$. よって，$[0;1]$, $(0;1)$, $[0;1)$ は $(0;1]$ と同じ濃度 $\aleph$ をもつということになる．

問 1. $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;+\infty)$ の濃度は $\aleph$ であることをたしかめる．

問 2. 無理数全部の集合の濃度は $\aleph$ であることを証明する．

§11. Cantor の 3 進集合

これは 3 進法展開

$$(1) \qquad x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_\nu}{3^\nu}+\cdots\cdots$$

において，

$$a_\nu=0 \ \text{または}\ 2 \ (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

であるような x 全部から成る集合のことである．いま，この集合を C であらわすこととし，$C\sim[0;1]$ を証明しよう：まず，(1) の x の中で，ある番号から先きの a_ν がすべて 0 にひとしいようなものを全部 C から除き去り，その残りを C' で表わす．その上で，(1) の x を C' の任意の元であるとし，

$$a_\nu=0 \text{ ならば } b_\nu=0,\ a_\nu=2 \text{ ならば } b_\nu=1$$

と定め，

$$(2) \qquad t=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_\nu}{2^\nu}+\cdots\cdots$$

とおいて，
$$t=f(x)$$

と書くことにすれば，$f(x)\in(0\,;\,1]$．よって，ここに，C' から $(0\,;\,1]$ の中への写像 f が得られる．明らかに，$x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$ である*.

逆に（2）の t を $(0\,;\,1]$ の任意の元とし，（1）において

$$b_\nu=0 \text{ なるとき } a_\nu=0,\ b_\nu=1 \text{ なるとき } a_\nu=2$$

と定めれば，$x=f(t)$．すなわち $f(C')=(0,\ 1]$．よって，$C'\sim(0\,;\,1]$．しかるに，$C-C'$ は有理数の集合だから，$C-C'$ は可付着集合である．よって，$C=C'\cup(C-C')\sim C'$．また $(0\,;1]\sim[0\,;\,1]$ だから，結局，$C\sim[0\,;1]$.

集合 C は次のような手続で得られたものと考えられる：まず，$[0\,;\,1]$ から開区間 $\left(\frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3}\right)$ をとりのぞき，残りの集合を A_1 であらわす：

$$A_1=[0\,;\,1]-\left(\frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3}\right)=\left[0\,;\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}\,;\ 1\right]$$

A_1 は3進法展開（1）において $a_1\neq 1$ であるような x 全部から成る集合にほかならない．ただし，$\left[0\,;\ \frac{1}{3}\right]$ の右端 $\frac{1}{3}$ は A_1 の元であって，

$$\frac{1}{3}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots$$

と書かれることに注意する．

つぎに，A_1 の二つの閉区間 $\left[0\,;\ \frac{1}{3}\right]$ および $\left[\frac{2}{3}\,;\ 1\right]$ のまんなかから長さがそれぞれの長さの $\frac{1}{3}$ にひとしい開区間をのぞき去り，残りの集合を A_2 であらわす．A_2 は（1）において $a_1\neq 1,\ a_2\neq 1$ であるような x 全部から成る集合である．

---

* $x=\sum_{n=1}^{k-1}a_n3^{-n}+2\cdot3^{-k}$ なる x を C から除かないと，$x'=\sum_{n=1}^{k-1}a_n3^{-n}+\sum_{n=k+1}^{\infty}2\cdot3^{-n}$ のとき $x\neq x'$，$f(x)=\sum_{n=1}^{k-1}b_n2^{-n}+2^{-k}=\sum_{n=1}^{k-1}b_n2^{-n}+\sum_{n=k+1}^{\infty}2^{-n}=f(x')$ となって，f が1対1の対応にならない．

A_2 は 4 個の閉区間からできているが，そのおのおののまんなかから，また長さがそれぞれの長さの $\frac{1}{3}$ にひとしい開区間をとりのぞき，残りの集合を A_3 であらわす．……

このように，残った各閉区間のまんなかから，それぞれの $\frac{1}{3}$ の長さの開区間をとりのぞくという手続きをかぎりなくくりかえして行くとき，つぎつぎに得られる集合を

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_\nu,\ \cdots\cdots$$

とすれば，A_ν は（1）において

$$a_1 \neq 1,\ a_2 \neq 1,\ \cdots,\ a_\nu \neq 1$$

であるような x すべてから成る集合である．

$$A_\nu \supset A_{\nu+1} \quad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots),$$

$$C=\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = \lim_\nu A_\nu$$

であることは明らかであろう．

C を得るために $[0;\ 1]$ からつぎつぎにとりのぞいて行く開区間は C の**余区間**とよばれる．余区間の長さの和を試みに計算してみれば

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^{\nu-1}}{3^\nu}+\cdots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

これは閉区間 $[0;\ 1]$ そのものの長さにひとしい．してみれば，C は閉区間 $[0;\ 1]$ からその点の大部分をとりのぞいたのこりであるということになる．にもかかわらず，集合 C が $[0;\ 1]$ と対等であることは注目に値することというべきであろう．

§12. 上限と下限　上限下限は初等的なことがらながら，あとで出てくるので，ここで念のため説明をくわえておく．

A は実数から成る一つの集合であるとする．このとき，もし定数 L があって

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \leqq L$$

であるときは，A は上に有界な集合であるといい，L を A の上界と称する．L が A の上界であるとき，$L \leqq L'$ なる L' もまた A の上界であることは明らかであろう．A の

上界のうち最小のものを sup A であらわし，これを A の上限と名づける． A の上限 sup A とは，いいかえれば，つぎの条件 i) ii) を満足するような数 M のことである：

i) $x\in A$ ならば $x\leqq M$,

ii) $M'<M$ ならば $x\in A$, $M'<x$ なる x がかならずある．

sup A なる記号は，いま説明したように，本来は A が上に有界でない場合には無意味なわけであるが，習慣上そういう場合にも

$$\sup A=+\infty$$

と書くことがある．

定数 l があって

$$x\in A \quad ならば \quad x\geqq l$$

であるときは，A は下に有界であるといい，l を A の下界と称する．l が A の下界であるときは，$l'\leqq l$ なる l' もまた A の下界である． A の下界のうち最大のものを inf A であらわし，これを A の下限と名づける． A の下限 inf A とは，いいかえれば，つぎの二つの条件を満足する数 m のことである：

i) $x\in A$ ならば $x\geqq m$,

ii) $m<m'$ ならば $x\in A$, $x<m'$ なる x がある．

A が 下に有界でないことを等式

$$\inf A=-\infty$$

であらわすことがある．

A が上にも下にも有界であるとき，単に，A は有界であるといわれる．

II. 点集合と距離

§1. n 次元空間 R^n　1 変数 x の函数 $f(x)$, 2 変数 x, y の函数 $f(x, y)$, 3 変数 x, y, z の函数 $f(x, y, z)$ は，それぞれ，(x), (x, y), (x, y, z) の函数とも考えられる．しかるに，(x), (x, y), (x, y, z) は，それぞれ，1 次元空間（直線）の点，2 次元空間（平面）の点，3 次元空間（立体空間）の点をあらわすから，$f(x)$, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ は，また，それぞれの空間における点の函数——**点函数**とよばれることがある．

この流儀で行けば，4 変数の函数をとり扱うとき，ここに‘4 次元空間’なるものを想定して，(x, y, z, u) は 4 次元空間の点をあらわすと考え，$f(x, y, z, u)$ を 4 次元空間における点函数とよぶことにしてもそう不自然ではないであろう．おなじようにして，5 変数の函数は，また，‘5 次元空間’の点の函数とよんでもよかろうというわけである．

さらに一歩をすすめれば，n が任意の自然数であるとき，n 変数の函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を‘n 次元空間’の点の函数とよぼうという考えが生じてくるのも当然のいきおいであろう．

こういういきさつもあって，ここに，n 次元空間 R^n をつぎのように定義し，R^n における‘点’の集合（点集合）について考察の歩をすすめることにする．

定 義　あらゆる $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ から成る集合を n 次元空間 R^n と名づけ，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のおのおのを R^n の点と称する．このとき，x_1 を点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の第 1 座標，x_2 を第 2 座標，……，x_n を第 n 座標とよぶ．

R^1, R^2, R^3 はそれぞれ直線，平面，いわゆる立体空間に相当する．よって，一般に R^n における点の集合（点集合）の性質をしらべておけば，$n=1$, 2, 3 とおくことにより，直線，平面，立体空間における点集合の性質は一挙にしてこれを知ることができるわけである．

R^n における点集合を論ずるに先だって，記号やことばについてつぎの規約を設ける：

i) とくにことわらないかぎり，ローマ字の小文字 a, b, c, …, x, y, z はそれぞれ R^n における点をあらわすこととする．このとき，

$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, ……,
$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$

のように，点をあらわす小文字に番号をつけたものが座標になっているように書くものとする．

ii) 点そのものに番号をつけるときには，つぎのような書きかたをする：

$$a(1),\ a(2),\ \cdots\cdots,\ a(\nu),\ \cdots\cdots.$$

このとき，$a(\nu)$ の座標は $a_1{}^\nu$, $a_2{}^\nu$, …, $a_n{}^\nu$ であらわす*：

$$a(\nu)=(a_1{}^\nu,\ a_2{}^\nu,\ \cdots,\ a_n{}^\nu).$$

また，上記の点列をあらわすのにつぎのような記号ももちいられる：

$$a(\nu) \qquad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

iii) ギリシア小文字 α, β, γ, … は，とくにことわらないかぎり，実数をあらわす．

iv) $\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$,

$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$

によって，記号 αx, $x+y$ の意味を定める．なお，$x+(-1)y$ を $x-y$ と書く．

問 1. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, $\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \cdots, \alpha x_n+\beta y_n)$ をたしかめる．

v) $\{a+\lambda(b-a) \mid -\infty<\lambda<+\infty\}$ を点 a, b を結ぶ**直線**と称する．

vi) $\{a+\lambda(b-a) \mid 0\leqq\lambda\leqq 1\}$ を点 a, b を結ぶ**線分**と称する．

注意 v), vi) については，平面解析幾何学において，2点 (α, β), (α', β') をとおる直線の方程式が

---

* $x_1{}^\nu$ における ν を累乗の記号と混同するおそれはないであろう．$x_1{}^{(\nu)}$ と書くのもよいが，わずらわしいので $x_1{}^\nu$ と略して書くのである．

$$x=\alpha+\lambda(\alpha'-\alpha),\ \ y=\beta+\lambda(\beta'-\beta)$$

であることを想起すればわかりやすいであろう．

vii) A^c は R^n に関する点集合 A の余集合をあらわすものとする:

$$A^c=R^n-A$$

この場合，De Morgan の法則(I. §6, (8))が成り立つことはいうまでもない*.

$$(\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha^c,\ \ (\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha^c$$

なお，

$$A^{cc}=A,\ A\cup A^c=R^n,\ A\cap B=A-B^c$$

に注意する**.

問 2. $A\cap B=\theta$ ならば $A\subseteq B^c$ であることを証明する．

問 3. $A\subseteq B$ ならば $B^c\subseteq A^c$ であることを証明する．

最後に，今後単に点集合といえば R^n における点集合を指すことに注意しておく．

§2. R^nにおける区間 R^1 の場合にならい，$n\geqq 2$ のときにも R^n において

$$[a;\ b]=\{x\,|\,a_1\leqq x_1\leqq b_1,\ a_2\leqq x_2\leqq b_2,\ \cdots,\ a_n\leqq x_n\leqq b_n\}$$

$$(a;\ b)=\{x\,|\,a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2,\ \cdots,\ a_n<x_n<b_n\}$$

$$[a;\ b)=\{x\,|\,a_1\leqq x_1<b_1,\ a_2\leqq x_2<b_2,\ \cdots,\ a_n\leqq x_n<b_n\}$$

$$(a;\ b]=\{x\,|\,a_1<x_1\leqq b_1,\ a_2<x_2\leqq b_2,\ \cdots,\ a_n<x_n\leqq b_n\}$$

$$(a_i<b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

によって $[a;\ b]$, $(a;\ b)$, $[a;\ b)$, $(a;\ b]$ の意味を定め，これらをそれぞれ**閉区間**，**開区間**，**右半開区間**，**左半開区間**とよび，これを総称して**区間**という．とくに，$b_1-a_1=b_2-a_2=\cdots=b_n-a_n$ のときには，区間というかわりに**立方体**ということがある．

問 1. $x,\ y$ を $[a;\ b]$ の2点とすれば $x,\ y$ をむすぶ線分は $[a;\ b]$ の部分集合であることを証明する．

---

* この場合の α は集合 M の元をあらわす．かならずしも実数とはかぎらない．

** $(A^c)^c$ を A^{cc} と書く．

区間はいずれも可付番でない集合である.

[証 明]　$(a;\ b)\subseteq[a;\ b)\subseteq[a;\ b]$, $(a;\ b)\subseteq(a;\ b]$ だから, $(a;\ b)$ についてだけ証明すれば十分である: $A=\left\{x\,|\,a_1<x_1<b_1,\ x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2},\ x_3=\dfrac{a_3+b_3}{2},\ \cdots,\ x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}\right\}$ とおけば, $A\subset(a;\ b)$ で, しかも, すぐわかるように, $A\sim(a_1;\ b_1)$. ただし, $(a_1;\ b_1)$ は R^1 における開区間である. しかるに, $(a_1;\ b_1)\sim(0;\ 1)$ であるから (I. §8, 問 3), $A\sim(0;\ 1)$. ここに, $(0;\ 1)$ は濃度 $\aleph$ を有し可付番ではない集合である (I. §10, 例 3). よって, $(a;\ b)$ は可付番でない部分集合 A を有することになり, したがって, $(a;\ b)$ 自身も可付番ではありえない.

$(a;\ b)\subset R^n$ であるから, いま証明したことから, R^n 自身可付番でないことは明らかであろう.

問 2.　R^n における有理点 (座標がいずれも有理数であるような点) 全部の集合を Q^n であらわせば, Q^n は可付番集合であることを証明する. (数学的帰納法)

§3.　距　離　R^1, R^2, R^3 においては, よく知られているように, 点 x から点 y への距離は, それぞれ, つぎの式であらわされる.

$$(1)\quad |x-y|=[|x_1-y_1|^2]^{\frac{1}{2}},\ [|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2]^{\frac{1}{2}},\ [|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2]^{\frac{1}{2}}.$$

一般に R^n においても, これにならって,

$$(2)\quad \mathbf{dist}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\left[\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

を**点 $\boldsymbol{x}$ から点 $\boldsymbol{y}$ への距離**と定義する. (2) において, $n=1,\ 2,\ 3$ とすれば (1) が得られることはいうまでもない.

$$|x_i-y_i|\leqq \mathrm{dist}(x,\ y)\leqq\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

に注意する.

距離を上のように定義したとき R^n を n 次元 **Euclid (ユークリッド) 空間**という.

こうして定義された距離の基本的性質はつぎのごとくである:

D1)　dist($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)$\geqq$0.　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ のとき，またそのときにかぎり dist($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)=0.

D2)　dist($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)=dist($\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$).

D3)　dist($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)+dist($\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$)$\geqq$dist($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$)　　　(3 角不等式)

D1)，D2) は明らかであるから，D3) だけを証明しておく: D3) の不等式

$$\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqq\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

において，$x_i-y_i=u_i$, $y_i-z_i=v_i$ とおけば $x_i-z_i=u_i+v_i$ であるから

$$\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqq\left[\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

を証明すればよいわけである．しかるに，この不等式の両辺は負でないので，これを証明するにはその両辺を 2 乗して得られる不等式 **(Schwarz シュヴァルツの不等式)**

$$\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqq\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$$

を証明すれば十分である．$\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\leqq0$ のときはこの不等式は明らかだから，証明を要するのは $\sum_{i=1}^{n}u_iv_i>0$ の場合だけとなる．この場合には，両辺を 2 乗して得られる不等式

$$(3)\quad \left[\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right]^2-\sum_{i=1}^{n}u_i^2\sum_{i=1}^{n}v_i^2\leqq0$$

を証明することに帰着してしまう．

いま，λ を未知数とする 2 次方程式

$$\lambda^2\sum_{i=1}^{n}u_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}u_iv_i+\sum_{i=1}^{n}v_i^2=0$$

をつくってみると，その左辺は

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda u_i+v_i)^2$$

にひとしいから，この方程式は相ことなる実根をもちえない．したがって，その判別式は正ではないことがわかる．(3)は，すなわち，このことをあらわす不等式にほかならない．

注意 1.　D3) の‘3角不等式’は‘3 角形の 2 辺の和は他の 1 辺より小さくない’という定理にあたるものである．

問 1. $o=(0, 0, \cdots, 0)$ とするとき，$\mathrm{dist}(a, b)=\mathrm{dist}(o, b-a)=\mathrm{dist}(o, a-b)$ をたしかめる．

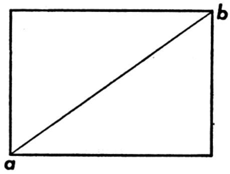
問 2. $\mathrm{dist}(\alpha x, \alpha y)=|\alpha|\,\mathrm{dist}(x, y)$ をたしかめる．

点集合があるとき，

$$\sup\{\mathrm{dist}(x, y)\,|\,x\in A,\ y\in A\}$$

を A の**直径**という*．

例 $(a;\ b)$ の直径は $\mathrm{dist}(a, b)$ にひとしい．



II-1 図

[証 明] $x\in(a;\ b)$, $y\in(a;\ b)$ とすれば $|x_i-y_i|<b_i-a_i$ だから

$$\mathrm{dist}(x, y)=\Big[\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$<\Big[\sum_{i=1}^n|b_i-a_i|^2\Big]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{dist}(a, b).$$

よって，

$$(4)\quad \sup\{\mathrm{dist}(x, y)\,|\,x\in(a;\ b),\ y\in(a;\ b)\}\leqq \mathrm{dist}(a, b).$$

つぎに，$\rho=\mathrm{dist}(a, b)$ とおき，$0<\varepsilon<\rho$, $a'=\dfrac{2\rho-\varepsilon}{2\rho}a+\dfrac{\varepsilon}{2\rho}b$, $b'=\dfrac{\varepsilon}{2\rho}a+\dfrac{2\rho-\varepsilon}{2\rho}b$ とすれば，$a'\in(a;\ b)$, $b'\in(a;\ b)$ で

$$\mathrm{dist}(a', b')=\Big[\sum_{i=1}^n\Big(\frac{2\rho-2\varepsilon}{2\rho}\Big)^2(a_i-b_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}=\frac{\rho-\varepsilon}{\rho}\mathrm{dist}(a, b)=\rho-\varepsilon.$$

すなわち，$0<\varepsilon<\rho$ なる任意の ε について

$$\sup\{\mathrm{dist}(x, y)\,|\,x\in(a;\ b),\ y\in(a;\ b)\}\geqq \mathrm{dist}(a, b)-\varepsilon.$$

よって，

$$(5)\quad \sup\{\mathrm{dist}(x, y)\,|\,x\in(a;\ b),\ y\in(a;\ b)\}\geqq \mathrm{dist}(a, b).$$

(4)，(5)から $\sup\{\mathrm{dist}(x, y)\,|\,x\in(a;\ b),\ y\in(a;\ b)\}=\mathrm{dist}(a, b)$

問 3. $\{x\,|\,\mathrm{dist}(a, x)<\rho\}$ の直径をもとめる．

§4. 点集合間の距離

$A\neq\theta$，$B\neq\theta$ のとき

$$\mathbf{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A})=\mathbf{inf}\{\mathbf{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\}$$

$$\mathbf{dist}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\mathbf{inf}\{\mathbf{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}\}$$

をもって，点 a と点集合 A との距離 $\mathrm{dist}(a, A)$ および点集合 A と点集

---

* 記号 sup については I 章 §12.

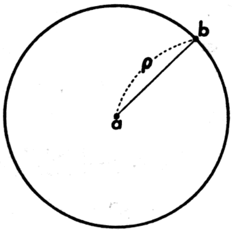
合 B との距離 dist(A, B) を定義する*.

注意　dist(a, A)=dist$(\{a\}, A)$ に注意する.

$a\in A$ ならば dist$(a, a)=0$ だから dist$(a, A)=0$. しかし，逆に dist$(a, A)=0$ であっても $a\in A$ とはかぎらない. たとえば，

例 1.　$A=\{x\,|\,\mathrm{dist}(a, x)<\rho\}$, dist$(a, b)=\rho$ とすれば $b\notin A$. しかるに，$0<\varepsilon<\rho$ とし $c=\frac{\varepsilon}{\rho}a+\frac{\rho-\varepsilon}{\rho}b$ とおけば

$$\mathrm{dist}(a, c)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{\varepsilon}{\rho}a_i-\frac{\rho-\varepsilon}{\rho}b_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\rho-\varepsilon}{\rho}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\rho-\varepsilon}{\rho}\,\mathrm{dist}(a, b)=\rho-\varepsilon<\rho.$$



II-2 図

$$\mathrm{dist}(c, b)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\rho}a_i+\frac{\rho-\varepsilon}{\rho}b_i-b_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\varepsilon}{\rho}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot\mathrm{dist}(a, b)=\varepsilon.$$

すなわち，$c\in A$, dist$(c, b)=\varepsilon$ だから，dist$(b, A)\leqq\varepsilon$. ここに，ε がいくら小さい正数でもよいのだから，dist$(b, A)=0$.

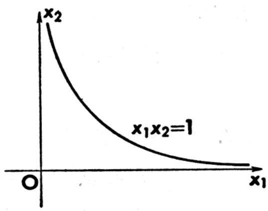
$A\cap B\neq\theta$ のときは，$a\in A\cap B$ とすれば $a\in A$, $a\in B$, dist$(a, a)=0$ だから dist$(A, B)=0$. しかし，逆に dist$(A, B)=0$ であっても $A\cap B\neq\theta$ とはかぎらない**. たとえば

例 2.　R^2 において $A=\{(x_1, x_2)\,|\,-\infty<x_1<+\infty,\ x_2=0\}$,
$B=\{(x_1, x_2)\,|\,x_1x_2=1\}$

とおき，$(x_1, x_2)\in B$, $(x_1, 0)\in A$ とすれば

$$\mathrm{dist}(A, B)\leqq\mathrm{dist}((x_1, 0), (x_1, x_2))$$
$$=[(x_1-x_1)^2+(0-x_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$=|x_2|=\frac{1}{|x_1|}.$$

よって，ε が任意の正数のとき $|x_1|>\frac{1}{\varepsilon}$ なる (x_1, x_2), $(x_1, 0)$ をとってみれば dist$(A, B)<\varepsilon$.



II-3 図

---

*　記号 inf については　I 章 § 12.

**　V 章 § 7, 例 3 参照.

ゆえに dist$(A,\ B)=0$. しかるに明らかに $A\cap B=\theta$.

点集合間の距離 dist$(A,\ B)$ についてはつぎの定理がある:

$$\mathbf{dist}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\mathbf{inf}\{\mathbf{dist}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{B})|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\}=\mathbf{inf}\{\mathbf{dist}(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A})|\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}\}.$$

[証 明]　ε を任意の正数とし,

$$a\in A,\ b\in B,\ \mathrm{dist}(a,\ b)<\mathrm{dist}(A,\ B)+\varepsilon$$

なる 2 点 a, b をとれば

$$\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}\leqq\mathrm{dist}(a,\ B)\leqq\mathrm{dist}(a,\ b)$$

だから

$$\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}<\mathrm{dist}(A,\ B)+\varepsilon.$$

よって, 任意の正数 ε についてこの不等式がなりたつことから

(1)　$\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}\leqq\mathrm{dist}(A,\ B).$

つぎに,

$$a\in A,\ \mathrm{dist}(a,\ B)<\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}+\varepsilon$$

なる点 a をとれば, dist$(a,\ B)$ の定義から

$$b\in B,\ \mathrm{dist}(a,\ B)\leqq\mathrm{dist}(a,\ b)<\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}+\varepsilon$$

なる b があるはずである. しかるに, dist$(A,\ B)\leqq$dist$(a,\ b)$ だから

$$\mathrm{dist}(A,\ B)<\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}+\varepsilon.$$

すなわち,　$\mathrm{dist}(A,\ B)\leqq\inf\{\mathrm{dist}(x,\ B)|x\in A\}.$

これと (1) とから, もとめる等式の前半が得られる. 後半の証明も同様である.

問 1.　i) $\mathrm{dist}(a,\ b)+\mathrm{dist}(b,\ A)\geqq\mathrm{dist}(a,\ A)$;

ii) $\mathrm{dist}(a,\ A)+\mathrm{dist}(a,\ B)\geqq\mathrm{dist}(A,\ B)$ を証明する.

問 2.　$A=\{x|\mathrm{dist}(a,\ x)<\rho\}$, $b\notin A$ のとき, $\mathrm{dist}(b,\ A)=\mathrm{dist}(a,\ b)-\rho$ をたしかめる.

§5. 球近傍

$\rho>0$ のとき

$$V(a;\ \rho)=\{x|\mathrm{dist}(a,\ x)<\rho\}$$

を a の ρ 球近傍, あるいは簡単に ρ 近傍といい, ρ をその半径とよぶ. 半径 ρ を明示しないときは $V(a)$ であらわし, 単に a の球近傍という.

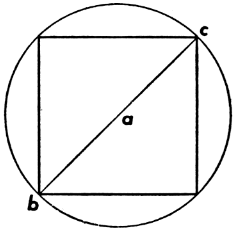
注 意 $b_i=a_i-\dfrac{\rho}{\sqrt{n}}$, $c_i=a_i+\dfrac{\rho}{\sqrt{n}}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とおくとき，$x\in(b; c)$ ならば $\mathrm{dist}(a, x)<\rho$ だから，$(b; c)\subseteq V(a; \rho)$. しかるに，$(b; c)$ は可付番でないから (I. §10, 問1)，これを部分集合にもつ $V(a; \rho)$ も可付番でない集合である (II-4 図).

球近傍の基本的性質はつぎの三つである.

V1) $a\in V(a)$.

V2) $V_1(a), V_2(a), \cdots, V_k(a)$ が a の任意の球近傍であるとき，$V_1(a)\cap V_2(a)\cap\cdots\cap V_k(a)$ も a の球近傍である.

V′3) $b\in V(a)$ ならば $V(b)\subseteq V(a)$ なる b の球近傍 $V(b)$ がある.

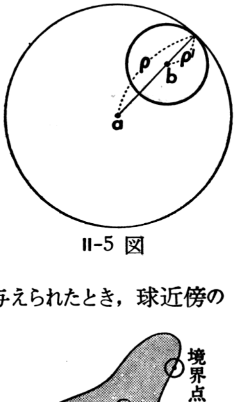


II-4 図

[証 明] V1) は明らかである.

V2): $V_1(a), V_2(a), \cdots V_k(a)$ の半径をそれぞれ $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ とし，$\rho=\min(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k)$ とすれば，$V_1(a)\cap V_2(a)\cap\cdots\cap V_k(a)=V(a; \rho)$ である.

V′3): $V(a)$ の半径を ρ とし，$\rho'=\rho-\mathrm{dist}(a, b)$ とおき，$V(b)=V(b; \rho')$ とする. $x\in V(b)$ ならば $\mathrm{dist}(a, x)\leqq\mathrm{dist}(a, b)+\mathrm{dist}(b, x)<\mathrm{dist}(a, b)+\rho'=\rho$. よって，$x\in V(a)$. すなわち，$V(b)\subseteq V(a)$.

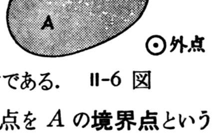


II-5 図

§6. 内点，外点，境界点 点集合 A が与えられたとき，球近傍の概念をつかって，R^n の点をつぎのように分類する.

i) A の内点: $V(x)\subseteq A$ なる x の球近傍 $V(x)$ があるとき，x を A の**内点**という.

ii) A の外点: A の余集合 A^c の内点を A の**外点**という. すなわち，$V(y)\subseteq A^c$ なる y の球近傍 $V(y)$ があるとき，y を A の外点というわけである.



II-6 図

iii) A の境界点: A の内点でも外点でもない点を A の**境界点**という.

いいかえれば，境界点とはそのどの球近傍にも A の点と A^c の点とが両方ともはいっているような点のことである． $A^{cc}=A$ だから，この定義からわかるとおり，A の境界点は同時に A^c の境界点でもあるわけである．

R^n の点はいずれも R^n の内点である．したがって，R^n には外点も境界点もない． $\theta=(R^n)^c$ だから，空集合 θ に関しては R^n の点はすべて外点である．

問 1. a が A の内点（外点）であるための必要十分条件は $\mathrm{dist}(a,\ A^c)>0$ $(\mathrm{dist}(a,\ A)>0)$ であることを証明する．

問 2. a が A の境界点であるための必要十分条件は $\mathrm{dist}(a, A)=0, \mathrm{dist}(a, A^c)=0$ であることを証明する．

A の内点全部の集合を $\boldsymbol{A^i}$ であらわし，これを A の**内核**という． A^i の点は定義 i) により A の点だから

$$\boldsymbol{A^i \subseteq A.}$$

問 3. $A\subseteq B$ ならば $A^i\subseteq B^i$ であることを証明する．

A の外点全部の集合を $\boldsymbol{A^e}$ であらわし，これを A の**外部**という． 定義 ii) により*

$$\boldsymbol{A^e=A^{ci},\ A^e\subseteq A^c.}$$

A の境界点全部の集合を $\boldsymbol{A^l}$ であらわし，これを A の**境界**という．定義 iii) により

$$\boldsymbol{A^l=A^{ic}\cap A^{ec}=A^{\ c}\cap A^{cic}.}$$

$A^{cc}=A$ だから，$A^l=(A^c)^{cic}\cap(A^c)^{ic}$． すなわち，$A^l=A^{cl}$． いいかえれば A の境界と A^c の境界は一致する（このことは，じつは，上の iii) からも明らかである）．

例 1. $A=V(a;\ \rho)$: V′3) により A の点はすべて A の内点である: $A\subseteq A^i$. しかるに，$A^i\subseteq A$ だから $A^i=A$． また，§4，例 1 により，$\mathrm{dist}(a,\ x)\leqq\rho$ ならば $\mathrm{dist}(x,\ A)=0$． よって，$\mathrm{dist}(y,\ A)>0$ ならば $\mathrm{dist}(a,\ y)>\rho$．逆に，$\mathrm{dist}(a,\ y)>\rho$ ならば，$y\notin A$． よって §4，問 2 により $\mathrm{dist}(y,\ A)=\mathrm{dist}(a,\ y)-\rho>0$． ゆえに問 1 により $A^e=\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)>\rho\}$． つぎに，$A^l=A^{ic}\cap A^{ec}=\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)\geqq\rho\}\cap\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)\leqq\rho\}=\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)=\rho\}$． この例では $x\in A^l$ ならば $x\notin A$ であ

* $(A^c)^i$ を A^{ci} と書く．以下これにならう．

るが $x\in A^e$ でないこと，すなわち，A にぞくしない点がかならずしも A の外点でないことに注意する．

例 2. $A=\{x\mid \mathrm{dist}(a,\ x)\leqq\rho\}$: このときは

$$A^i=V(a;\ \rho),\ A^e=\{x\mid \mathrm{dist}(a,\ x)>\rho\},\ A^l=\{x\mid \mathrm{dist}(a,\ x)=\rho\}.$$

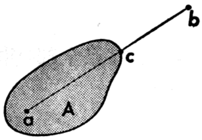
この例で，$x\in A^l$ ならば $x\in A$ であるが $x\in A^i$ でないこと，すなわち，A の点がかならずしも A の内点でないことに注意する．なお，例 1 では A の境界点は A にぞくしない，しかるに例 2 では A の境界点は A にぞくしている．このように，点集合の境界点はその点集合の点であることもあり，そうでないこともある．

例 3. $A=\{a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(k)\}$: 点 x, 正数 ρ をどうえらんでも，$V(x;\ \rho)$ は可付番でない集合だから(§5, 注意)，$V(x;\ \rho)\subseteq A$ であることはない．よって，A は内点をもたない点集合である: $A^i=\theta$．つぎに，$x\in A^c$ とし，$\rho=\min\{\mathrm{dist}(x,\ a(\nu))\mid \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$ とおけば $V(x;\ \rho)\cap A=\theta$，いいかえれば，$V(x;\ \rho)\subseteq A^c$．よって，x は A の外点である．すなわち，$A^c=A^e$．以上のことから，$A^l=A^{ic}\cap A^{ec}=\theta^c\cap A^{cc}=R^n\cap A=A$．したがって，$A$ の境界は A 自身ということになる．

問 4. $A^{ii}=A^i$, $A^{ei}=A^e$ を証明する．

問 5. $A\cup A^l=A^{cic}=A^{ec}$ を証明する．

さきにのべたように，R^n の点はすべて R^n の内点であるから R^n は境界をもたない．また，θ は R^n の余集合であるから，空集合 θ も境界をもたない．以下，$\boldsymbol{A\neq R^n}$, **$\boldsymbol{A\neq\theta}$ ならば $\boldsymbol{A}$ にはかならず境界点がある**ことを証明しておこう:



II-7 図

$A\neq\theta$, $A^c\neq\theta$ だから，$a\in A$, $b\in A^c$ とし

$$S=\{a+\lambda(b-a)\mid 0\leqq\lambda\leqq1\},$$
$$\lambda_0=\sup\{\lambda\mid a+\lambda(b-a)\in S\cap A\},$$
$$c=a+\lambda_0(b-a)$$

とおく (S は a と b とを結ぶ線分である．$a=a+0(b-a)\in A$ だから $S\cap A\neq\theta$ に注意)．$V(c;\ \rho)$ を c の任意の球近傍とするとき，$A\cap V(c;\ \rho)\neq\theta$, $A^c\cap V(c;\ \rho)\neq\theta$ を示せば c が A の境界点であることが証明されるわけである．$c\in A$ の場合だけを証明しておく．($c\in A^c$ の場合の証明も同様である．) この場合，$0\leqq\lambda_0<1$ だから，$\lambda_0<\lambda<1$, $0<(\lambda-\lambda_0)\mathrm{dist}(a,\ b)<\rho$ なる λ をとって，$x=a+\lambda(b-a)$ とおけば $x\in A^c$．しかるに，§3, 問1, 2により

$$\mathrm{dist}(c,\ x)=\mathrm{dist}(0,\ x-c)=\mathrm{dist}(0,\ (\lambda-\lambda_0)(b-a))$$
$$=(\lambda-\lambda_0)\mathrm{dist}(0,\ b-a)=(\lambda-\lambda_0)\mathrm{dist}(a,\ b)<\rho.$$

よって，$x\in V(c;\ \rho)$．すなわち，$x\in A^c\cap V(c;\ \rho)$．また，$c\in A\cap V(c;\ \rho)$ はいうまでもないから，これで，$A\cap V(c;\ \rho)\neq\theta$, $A^c\cap V(c;\ \rho)\neq0$ が示されたわけである．

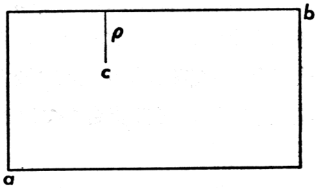
III. 開集合と閉集合

§1. 開集合 $A=A^i$ のとき A は**開集合**であるという．$(R^n)^i=R^n$，$\theta^i=\theta$ だから，R^n，θ はいずれも開集合である．$A\neq\theta$ のとき A が開集合であるとは A のどの点も A の内点になっていることを意味する．開集合をあらわすのに文字 G をもちいることが多い．今後，とくにことわらないかぎり，G は開集合をあらわすものと約束する．

例 1. A^i, A^e は開集合である．(II. §6, 問 4)

例 2. II 章 §6, 例 1 によれば $\{x|\mathrm{dist}(a,\ x)<\rho\}^i=\{x|\mathrm{dist}(a,\ x)<\rho\}$ すなわち，球近傍 $V(a\,;\,\rho)$ は開集合である．

例 3. 開区間 $(a\,;\,b)$ は開集合である．



III-1 図

証明はつぎのとおり：$c\in(a\,;\,b)$ とし

$$\rho=\min\{c_1-a_1,\ b_1-c_1,\ c_2-a_2,\ b_2-c_2,\ \cdots,\ a_n-c_n,\ b_n-c_n\}$$

とおけば $V(c\,;\,\rho)\subseteq(a\,;\,b)$．なぜならば，$x\in V(c\,;\,\rho)$ とすれば

$$x_i-a_i=(x_i-c_i)+(c_i-a_i)\geqq-\mathrm{dist}(x,\ c)+(c_i-a_i)>-\rho+(c_i-a_i)\geqq 0,$$

$$b_i-x_i=(b_i-c_i)+(c_i-x_i)\geqq(b_i-c_i)-\mathrm{dist}(x,\ c)>(b_i-c_i)-\rho\geqq 0.$$

だから，$a_i<x_i<b_i$，すなわち，$x\in(a\,;\,b)$．

問 1. $\{x|\mathrm{dist}(a,\ x)>\rho\}$ は開集合であることを証明する．

開集合の基本的性質はつぎの三つである．

O1) **開集合の結びは開集合である．**

O2) **有限個の開集合の交わりは開集合である．**

O3) **R^n および θ は開集合である．**

[証 明] O1)：$G=\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha$ において G_α はいずれも開集合であるとする．$x\in G$ ならば，ある α に対して $x\in G_\alpha$．しかるに，G_α は開集合だから $V(x)\subseteq G_\alpha$ なる x の球近傍 $V(x)$ があるはずである．よって，$G_\alpha\subseteq G$ から $V(x)\subseteq G$．すなわち x は G の内点である．

O2)：G_1, G_2, …, G_k は開集合であるとし，$G=\bigcap_{i=1}^{k}G_i$ が開集合であることを証明する．まず，$G=\theta$ ならば，θ は開集合だから，G も開集合である．$G\neq\theta$ のときには，$x\in G$ とすれば，$x\in G_i$ ($i=1, 2, \cdots, k$) だから $V_i(x)\subseteq G_i$ なる x の球近傍 $V_i(x)$ がある．しかるに，V2) により，$V(x)=\bigcap_{i=1}^{n}V_i(x)$ は x の球近傍で，しかも $V(x)\subseteq V_i(x)\subseteq G_i$ ($i=1, 2, \cdots, k$) ゆえに，$V(x)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}G_i=G$．これで G の点はいずれもその内点であること，したがって，G の開集合であることがわかった．

問 2. A が開集合であるための必要十分条件は $A\cap A^l=\theta$ であることを証明する．

最後に内核について，ここで，一言しておく．まず，例 1 により，A の内核 A^i は開集合である．つぎに，G が開集合で $G\subseteq A$ ならば，$G^i\subseteq A^i$ (II. §6, 問3)．しかるに，$G=G^i$ だから $G\subseteq A^i$．すなわち，A^i は A の部分集合である開集合のうちで‘最大’のものである．このことから，A^i は A の部分集合である開集合すべての結びであるとも考えられるわけである．

§2. 近　傍 点 a をその元とする任意の開集合を点 a の**開近傍**と称する．a の球近傍は開集合だから (§1, 例 2)，球近傍は開近傍の特別な場合にあたるわけである．点 a の開近傍をあらわすのには，やはり，記号 $V(a)$をもちいることにする．

II 章 §5 の V1), V2), V′3) において，‘球近傍’ということばを‘開近傍’でおきかえれば，この三つの定理はそのまま成立する： V1) は開近傍の定義から明らかであるし，V2) は O2) からすぐ出てくる．また，$V(a)$ を a の開近傍とするとき，$b\in V(a)$ ならば $V(a)$ は b を元とする開集合であるから，$V(a)$ 自身 b の開近傍であると考えることができる．$V(a)\subseteq V(a)$ だから，これで V′3) も成り立つことが示されたことになる．

さらに一歩をすすめて，近傍の概念をつぎのように拡張することができる：すなわち，点 a の開近傍を部分集合とするような点集合を，一般に，点 a の近傍と名づけるのである．開近傍，したがって球近傍はこの一般的な意味

の近傍の特別な場合にあたるわけである．点 a の近傍をあらわすのには，前とおなじく，記号 $V(a)$ を流用する．

例 1.　$\{x \mid \mathrm{dist}(a,\ x) \leqq \rho\}$ は a の近傍である．

例 2.　$c \in (a;\ b)$ ならば $(a;\ b)$, $[a;\ b]$ は c の近傍である．

V1), V2) において‘球近傍’ということばを‘近傍’でおきかえても，この二つの定理はそのまま成立することは，近傍の定義と O2) とから明らかであろう．

問 1.　上記のことをたしかめる．

V′3) については少しく修正が必要である．修正したものを V3) とし，V1), V2) とともに並べて書いておこう．以下，$V(a)$ は一般に点 a の近傍をあらわすものとする．

V1)　$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$.

V2)　$\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{a}),\ \cdots,\ \boldsymbol{V}_k(\boldsymbol{a})$ **が** $\boldsymbol{a}$ **の近傍ならば** $\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{a}) \cap \boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{a}) \cap \cdots \cap \boldsymbol{V}_k(\boldsymbol{a})$ **も** $\boldsymbol{a}$ **の近傍である．**

V3)　$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$ **が** $\boldsymbol{a}$ **の近傍であるとき，**$\boldsymbol{a}$ **の近傍** $\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{a})$ **があって，**$\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{a})$ **のどの点** $\boldsymbol{x}$ **をとっても** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$ **がその** $\boldsymbol{x}$ **の近傍になっている** ($\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$).

V3) の証明：$V(a)$ が a の近傍であるときは，$a \in G \subseteq V(a)$ なる開集合 G があるはずである．この G のどの点 x をとっても，$x \in G \subseteq V(a)$ であるから，$V(a)$ は x の近傍である．よって $V_1(a)=G$ とおけば，これで V3) が証明されたわけである．

さらに，このように拡張された近傍の性質として，つぎの V4) をあげておく．

V4)　$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{X}$ **ならば** $\boldsymbol{X}$ **も** $\boldsymbol{a}$ **の近傍である．**

これは定義から明らかであろう．

注 意　$V(a)$ が a の任意の近傍であるとき，定義により，$V_1(a) \subseteq V(a)$ なる a の開近傍 $V_1(a)$ がある．よって，$V(a;\ \rho) \subseteq V_1(a)$, したがって $V(a;\ \rho) \subseteq V(a)$ なる球近傍 $V(a;\ \rho)$ があることに注意する．

問 2.　A が開集合であるための必要十分な条件は A が A の各点の近傍であることであることをたしかめる．

§3. 閉集合 A^c が開集合であるとき，A は**閉集合**であるという．$(R^n)^c=\theta$ で θ は開集合だから，R^n は閉集合である．また，$\theta^c=R^n$ で R^n は開集合だから θ も閉集合である．すなわち，R^n および θ は，それぞれ，開集合でもあり閉集合でもあるような集合である．閉集合をあらわすのには文字 F をもちいることが多い．今後，とくにことわらないかぎり，F は閉集合をあらわすものと約束する．

注意 1. $A\neq R^n$, $A\neq\theta$ のときは $A^l\neq\theta$ (II. §6のおわり) だから，$A\cap A^l=\theta$, $A^c\cap A^l=\theta$ ではあり得ない．よって，A, A^c ともに開集合でありえない (§1, 問2)から，A は開集合でもあり閉集合でもあるということはありえない．

De Morgan の法則

$(\bigcap_{\alpha\in M}F_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in M}F_\alpha{}^c$, $(F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k)^c=F_1{}^c\cap F_2{}^c\cap\cdots\cap F_k{}^c$

からわかるように，開集合の基本的性質 O1), O2), O3) から，つぎの閉集合の基本的性質 F1), F2), F3) がでてくる:

F1) 閉集合の交わりは閉集合である．

F2) 有限個の閉集合の結びは閉集合である．

F3) R^n および θ はそれぞれ閉集合である．

例 1. $\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)>\rho\}$ は開集合だから (§1, 問1), $\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)\leqq\rho\}=\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,\ x)>\rho\}^c$ は閉集合である．

例 2. $[a\,;\,b]$ は閉集合である: これを証明するには $[a\,;\,b]^c$ が開集合であることを示せばよいわけである．$x\in[a\,;\,b]^c$ ならば，$[a\,;\,b]$ の定義から明らかなように，少なくとも一つの x_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ について，$x_j<a_j$ か $b_j<x_j$ でなければならない．$x_j<a_j$ の場合には，$\rho=a_j-x_j$ とおけば $V(x\,;\,\rho)\subseteq[a\,;\,b]^c$ である．なぜならば，$y\in[a\,;\,b]$ ならば $\mathrm{dist}(x,\ y)=\left[\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqq|x_j-y_j|=y_j-x_j>a_j-x_j=\rho$, すなわち，$y\in[a\,;\,b]$ ならば $y\notin V(x\,;\,\rho)$ であるからである．$b_j<x_j$ の場合の証明も同様である．これで，$[a\,;\,b]^c$ が開集合であること，したがって，$[a\,;\,b]$ が閉集合であることがわかった．

例 3. 有限個の点からなる点集合は閉集合である: この点集合を A であらわせば，II 章 §6, 例3により，$A^c=A^e$ だから，A^c は開集合 (§1, 例1) である．すなわち，A は閉集合である．

注意 2. すべての点集合が開集合か閉集合かいずれかであるというわけではない．開集合でもなく閉集合でもない点集合はいくらでもある (§6, 注意1).

問 1. $A \cup A^l$ は閉集合であることを証明する.

問 2. A が閉集合であるためには $A = A \cup A^l$ が必要十分であることを証明する.

問 3. G が開集合, F が閉集合のとき, $G - F$ は開集合, $F - G$ は閉集合であることを証明する.

§4. 閉包・触点 $A \subseteq F$ なるすべての閉集合 F の交わりを $\boldsymbol{A^a}$ であらわし, A^a を A の**閉包**と称する.

注 意 1. A がどんな集合でも $A \subseteq F$ なる閉集合 F はかならずある: たとえば, $F = R^n$.

$F1$) により, A^a は閉集合である. $A \subseteq A^a$ はいうまでもないであろう. なお, $A \subseteq F$ なるどの閉集合 F をとっても $A^a \subseteq F$ なのだから, A^a は $A \subseteq F$ なる閉集合 F のうちで '最小' のものであるといってもよいわけである. このことから, まず

A が閉集合であるための必要十分条件は $A = A^a$ である

ことがわかる.

注 意 2. $A \subseteq A^a$ なのだから, A が閉集合であることを証明するのには $A^a \subseteq A$ を示せば十分である.

つぎに,

$$\boldsymbol{A^a = A \cup A^l}$$

であることを示そう: まず, $A \subseteq A \cup A^l$ で $A \cup A^l$ は閉集合だから (§3, 問 1), $A^a \subseteq A \cup A^l$. つぎに, $A \subseteq F$ なる任意の閉集合 F をとるとき, $F^c \subseteq A^c$. ここに F^c は開集合だから $F^c = F^{ci} \subseteq A^{ci} = A^e$. よって, $A^{ec} \subseteq F^{cc} = F$. しかるに, $A^{ec} = A \cup A^l$ だから (II. §6, 問 5), $A \cup A^l \subseteq F$. よって, $A \cup A^l \subseteq A^a$. したがって, $A \cup A^l = A^a$.

問 1. $A^{ac} = A^e = A^{ci}$ を証明する.

A^a の点を A の**触点**と称する. いいかえれば, A^a は A の触点の集合であるということになるわけである.

いま, $a \in A^a$ とすれば $a \in A$ か $a \in A^l$ なのだから, a のどの近傍 $V(a)$ にもかならず A の点が少なくとも一つはふくまれている: $V(a) \cap A \neq \theta$. また, $b \in A^{ac}$ ならば, $A^{ac} = A^e = A^{ci}$ だから, b は A^c の内点であり, したがって,

b の近傍のなかには A の点を一つもふくまないものがあるはずである．こうしてみると，A の触点とはそのどの近傍にも A の点をふくむような点であるということになった．

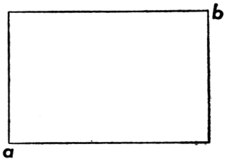
問 2. $a \in A^a$ であるための必要十分条件は $\mathrm{dist}(a, A)=0$ であることを証明する．

例 1. $\{x\}^a=\{x\}$: $y \neq x$ ならば $x \bar{\in} V(y;\, \mathrm{dist}(x, y))$, だから，$y$ は $\{x\}$ の触点ではない．よって，$\{x\}$ の触点は x だけということになる．

例 2. $\{x \mid \mathrm{dist}(a, x)<\rho\}^l=\{x \mid \mathrm{dist}(a, x)=\rho\}$ だから (II. §6, 例 1),

$$\{x \mid \mathrm{dist}(a, x)<\rho\}^a=\{x \mid \mathrm{dist}(a, x)<\rho\} \cup \{x \mid \mathrm{dist}(a, x)=\rho\}$$
$$=\{x \mid \mathrm{dist}(a, x) \leqq \rho\}.$$

例 3. $x \in [a;\, b]$ ならば x のどの近傍にも $(a;\, b)$ の点がふくまれていることは $[a;\, b]$ の定義から，すぐわかる．すなわち，$[a;\, b]$ の点はすべて $(a;\, b)$ の触点である: $[a;\, b] \subseteq (a;\, b)^a$．しかるに，$[a;\, b]$ は閉集合で (§3, 例 2), $(a;\, b) \subseteq [a;\, b]$ だから，$(a;\, b)^a \subseteq [a;\, b]$．したがって，$(a;\, b)^a=[a;\, b]$．



III-2 図

閉包の基本的性質をあげればつぎのごとくである:

A1) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^a=\boldsymbol{A}^a \cup \boldsymbol{B}^a$.

A2) $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}^a$.

A3) $\boldsymbol{A}^{aa}=\boldsymbol{A}^a$.

A4) $\theta^a=\theta$, $(\boldsymbol{R}^n)^a=\boldsymbol{R}^n$.

[証 明] A1): $A \subseteq A^a$, $B \subseteq B^a$ だから $A \cup B \subseteq A^a \cup B^a$．しかるに，$A^a \cup B^a$ は閉集合だから (F2)), $(A \cup B)^a \subseteq A^a \cup B^a$．また，$A \subseteq A \cup B \subseteq (A \cup B)^a$ で，$(A \cup B)^a$ は閉集合だから，$A^a \subseteq (A \cup B)^a$．同様に，$B^a \subseteq (A \cup B)^a$．よって，$A^a \cup B^a \subseteq (A \cup B)^a$．

A2) は定義から明らかである．

A3): A^a は閉集合だから $(A^a)^a=A^a$．

A4): θ, R^n はそれぞれ閉集合だから $\theta^a=\theta$, $(R^n)^a=R^n$．

なお，

$$A \subseteq B \text{ ならば } A^a \subseteq B^a$$

であることに注意する．このことは閉包の定義から直接に証明することもでき

るが，つぎのように A1) から導く方法もある: $A \subseteq B$ だから $A \cup B = B$. よって，A1) により，$B^a = A^a \cup B^a$ すなわち，$A^a \subseteq B^a$.

$A^{ac} = A^e = A^{ci}$ (問 1) は A がどんな点集合でも成り立つ等式である. よって，いま A のかわりに A^c を入れてみると，$A^{cac} = A^{cci} = A^i$，すなわち，

$$A^{ca} = A^{ic},\ A^{ac} = A^{ci}.$$

この等式をつかえば，A1), A2), A3), A4) から双対的につぎの I1), I2), I3), I4) が出てくる:

I1) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$.

I2) $A^i \subseteq A$.

I3) $A^{ii} = A^i$

I4) $\theta^i = \theta$, $(R^n)^i = R^n$.

問 3. I1), I2), I3), I4) を証明する.

問 4. $A^l = A^a - A^i = A^a \cap A^{ca}$ を証明する.

問 5. $G \cap A^a \subseteq (G \cap A)^a$ を証明する.

§5. 集積点・導集合 $x \in (A - \{x\})^a$ であるとき，x は A の**集積点**であるという. この定義によれば，x が A の集積点であるとは，x のどの近傍 $V(x)$ も x 以外の A の点をふくむような点，ほかのことばでいうと $V(x) \cap (A - \{x\}) \neq \theta$ であるような点であるということになる. A の内点はもとより A の集積点である.

$x \in A^a$ で $x \notin A$ ならば，$A - \{x\} = A$ だから，$x \in (A - \{x\})^a$. すなわち，A にふくまれない A の触点は A の集積点である. 以上でわかるように A の集積点は A の点であることもあり，そうでないこともある.

例 1. R^1 において $A = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{\nu},\ \cdots\right\}$ とすれば 0 は A の集積点である.

$x \in A$ で x が A の集積点でないとき，x は A の**孤立点**であるといわれる: $x \in (A - \{x\})^{ac} = (A - \{x\})^{ci}$. x が A の孤立点であるとは，x のある近傍にふくまれる A の点は x 自身だけであることを意味する. $A = \{a\}$ ならば a

はもとより A の孤立点である．有限点集合 $\{a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(k)\}$ の各点も孤立点である．また，R^1 において，$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{\nu},\ \cdots\cdots\right\}$ の点はいずれも孤立点である．

A のすべての集積点の集合を $\boldsymbol{A^d}$ であらわし，これを A の**導集合**という．$A^i \subseteq A^d$ は明らかであろう．

問 1. $A \subseteq B$ ならば $A^d \subseteq B^d$ であることを証明する．

いま，$x \in A^d$ とすると，$x \in (A-\{x\})^a \subseteq A^a$ だから，

$$A^d \subseteq A^a$$

これと $A \subseteq A^a$ から，$A \cup A^d \subseteq A^a$．しかるに，この節のはじめにのべたところにより，$x \in A^a$，$x \notin A$ ならば $x \in A^d$．よって，$x \in A^a$ ならば $x \in A$ か $x \in A^d$，すなわち，$A^a \subseteq A \cup A^d$．これで

$$A^a = A \cup A^d$$

であることが示されたわけである．

とくに，A が閉集合のときには $A^a = A$ であるから，上の等式によれば，$A = A \cup A^d$．よって，$A^d \subseteq A$．逆に，$A^d \subseteq A$ ならば $A = A \cup A^d = A^a$．すなわち，A が閉集合であるための必要十分条件は

$$A^d \subseteq A$$

である．

この条件をつかって，$\boldsymbol{A^d}$ **は閉集合である**ことを証明しよう．それには

$$A^{dd} \subseteq A^d$$

であること，いいかえれば，$x \notin A^d$ ならば $x \notin A^{dd}$ なることを示せばよいわけである．よって，いま，$x \notin A^d$ とし，$A \cap (V(x)-\{x\}) = \emptyset$ なる x の開近傍 $V(x)$ をとり，y を $V(x)-\{x\}$ の任意の点とする．$0 < \rho < \mathrm{dist}(x,\ y)$，$V(y;\ \rho) \subseteq V(x)$ なる y の球近傍 $V(y;\ \rho)$ をとれば，$V(y;\ \rho) \subseteq V(x) - \{x\}$ であるから $A \cap V(y;\ \rho) = \emptyset$．よって，$V(x) - \{x\}$ のどの点 y をとっても y は A の集積点ではありえない．すなわち，$A^d \cap (V(x)-\{x\}) = \emptyset$．これは $x \notin A^{dd}$ を意味する．

$A^d \subseteq A$ のとき A が閉集合であることは上にのべたとおりであるが，反対に

$$A \subseteq A^d$$

のときは，A は**自己稠密**な集合であるといわれる．これは，いいかえれば，A のどの点も A の集積点であること，すなわち A には孤立点がないことになる．たとえば，A が開集合ならば $A = A^i \subseteq A^d$ だから，開集合は自己稠密な集合である．

注意 1. 空集合も自己稠密集合と考える．

A が閉集合でしかも自己稠密であるとき：$A^d \subseteq A$，$A \subseteq A^d$，すなわち

$$A^d = A$$

であるとき，A は**完全集合**であるという．いいかえると，完全集合とは孤立点をもたない閉集合のことである．

A が自己稠密な集合ならば A^a は完全集合である．

[証 明] A^a は閉集合であるから，これが自己稠密であることを示せばよいわけである．A が自己稠密だから，$A \subseteq A^d$．よって，$A^a \subseteq A^{da}$．しかるに A^d は閉集合だから，$A^{da} = A^d$．よって，$A^a \subseteq A^d$．一方，$A \subseteq A^a$ から $A^d \subseteq A^{ad}$．したがって，$A^a \subseteq A^{ad}$．

注意 2. とくに，G が開集合ならば G^a は完全集合であるわけである．

例 2. $\{x \mid \mathrm{dist}(a, x) \leqq \rho\}$ は開集合 $V(a; \rho)$ の閉包 $(V(a; \rho))^a$ だから (§4, 例 2)，完全集合である．

例 3. $[a; b] = (a; b)^a$ で $(a; b)$ は開集合だから $[a; b]$ は完全集合である．

例 4. Cantor の 3 進集合 (I. §11) を C であらわせば C は完全集合である．

[証 明] $[0; 1] - C$ は開区間の結びであるから開集合である．しかるに，$C = [0; 1] - ([0; 1] - C)$ において，$[0; 1]$ は閉集合であるから，C は閉集合である (§3，問 3)．つぎに，$x \in C$ とし，x の 3 進法展開を

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$$

とする．x の任意の ρ 近傍 $V(x; \rho)$ が与えられたとき，$\dfrac{1}{3^{k-1}} < \rho$ なる自然数 k をとり，$a_k = 0$ ならば $b_k = 2$，$a_k = 2$ ならば $b_k = 0$ とおいて，点

$$y = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{a_\nu}{3^\nu} + \frac{b_k}{3^k} + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^\nu}$$

を考える．

$$|x - y| \leqq \left| \frac{a_k}{3^k} - \frac{b_k}{3^k} \right| + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \left| \frac{a_\nu}{3^\nu} - \frac{2}{3^\nu} \right| \leqq \frac{2}{3^k} + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^\nu}$$

$$=\frac{2}{3k}+\frac{1}{3k}=\frac{1}{3k-1}<\rho$$

だから，$y\in V(x;\rho)$. しかも，$x\neq y$, $y\in C$ だから，$y\in C-\{x\}$. すなわち，$x\in(C-\{x\})^a$, これは x が C の集積点であることを意味する．なお，上記の y は，C を得るために $[0;1]$ からとりのぞいて行く開区間の一つの端点であることに注意する．すなわち，C の点は，いずれも，とりのぞかれる開区間の端点の集積点になっているのである．

問 2. 自己稠密な集合と開集合との交わりは自己稠密集合であることを証明する．

§6. 稠密な集合 $A^a=R^n$ であるとき，A は**稠密な集合であるという**．A が稠密であるとは，いいかえれば，R^n のどの点のどの近傍にも A の点がふくまれているということである．

例 1. R^n における有理点の集合 Q^n は稠密な集合である: a を R^n における任意の点，$V(a;\rho)$ を a の任意の近傍とする．

$$|a_i-b_i|<\frac{\rho}{\sqrt{n}} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

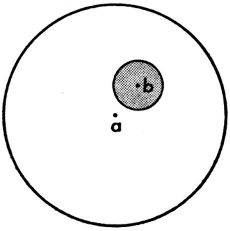
なる有理数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ をえらべば，$\mathrm{dist}(a, b)<\rho$ だから，$b\in V(a;\rho)$, よって $Q^n\cap V(a;\rho)\neq\theta$. しかるに，$a$ のどの近傍 $V(a)$ をとっても，正数 ρ を十分小さくえらべば $V(a;\rho)\subseteq V(a)$ だから，$Q^n\cap V(a)\neq\theta$. すなわち，$a\in(Q^n)^a$. なお，この例では Q^n が可付番集合であることに注意する (II. §3, 問 2).

注意 1. 例 1 からわかるとおり，Q^n は閉集合ではない．また，例 1 におけると同様の方法により Q^n のどの点のどの近傍にも有理点でない点のあることが証明できるから，Q^n は開集合でもない．すなわち，Q^n は閉集合でも開集合でもない集合の例である．

一般に，$B\subseteq A^a$ であるとき，**A は B に対し稠密**であるという．(かならずしも，$A\subseteq B$ であることを要しない．) 単に A が稠密な集合であるといわれるのは，$B=R^n$ の場合にあたるわけである．

‘稠密’ に対立して ‘疎 (マバラ)’ という概念がある: A が**疎な集合**であるというのは，A の外部 A^{ci} が稠密な集合であることを指すのである: $A^{cia}=R^n$. これは，いいかえれば，どの点 a のどの近傍にも A^{ci} の点がふくまれるということになるが，これをさらに詳しく考えるとつぎのようになる: A は疎な集合，a は任意の点，$V(a)$ は a の任意の近傍とし，$V'(a)\subseteq V(a)$ なる a の開近傍 $V'(a)$ をとる．$V'(a)$ にふくまれる A^{ci} の点を b とすれば，b は

A^c の内点なのであるから，$V(b)\subseteq A^c$ なる b の開近傍 $V(b)$ があるはずである．$G=V'(a)\cap V(b)$ とおけば，$G\subseteq V(a)$，$G\cap A=\theta$，すなわち，a のどの近傍 $V(a)$ をとっても，A の点を一つもふくまない開部分集合 G があるということになるわけである．逆に，どの点 a のどの近傍にも A の点をふくまない開部分集合 G があれば A が疎な集合であることは，もはや，明らかであろう．



III-3 図

例 2. R^1 において Cantor の 3 進集合 C は疎な集合である．

[証明] x を R^1 の任意の点とする．$x\notin C$ ならば $x\in C^c$．C は閉集合であるから，C^c は開集合，したがって $C^c=C^{ci}$． よって，$x\in C^c$ ならば $x\in C^{ca}=C^{cia}$．つぎに，$x\in C$ならば，§5，例 4 により，x のどの近傍にも $[0;\ 1]-C=[0;\ 1]\cap C^c$ を構成する開区間の一つの端点 y がふくまれている．$y\in([0;\ 1]\cap C^c)^a$ であるから，したがって，$x\in([0;\ 1]\cap C^c)^{aa}=([0;\ 1]\cap C^c)^a\subseteq C^{ca}$．すなわち，$x\in C$ のときも，$x\in C^{cia}$．よって，$R^1\subseteq C^{cia}$

注意 2. C は濃度 $\aleph$ の疎な完全集合であるわけである．

一般に $B\subseteq(A^{ci}\cap B)^a$ のとき，A は B に対し疎であるといわれる．単に，A が疎な集合とよばれるのは $B=R^n$ の場合にあたるわけである．

問 閉集合 F が疎であるための必要十分条件は $F^i=\theta$，すなわち，$F=F^l$ であることを証明する．

IV. 被覆定理

§1. 点列の収束　点列

$$(1)\quad a(\nu)\qquad (\nu=1,\ 2,\ \cdots)$$

と定点 a とがあって

$$(2)\quad \lim_{\nu} \mathrm{dist}(a(\nu),\ a)=0$$

であるとき，点列（1）は（点 a に）**収束**するといい，a を点列（1）の**極限点**と称する．また，このとき

$$\lim_{\nu} \boldsymbol{a}(\nu)=\boldsymbol{a},\quad \text{または}\quad \boldsymbol{a}(\nu)\to\boldsymbol{a}$$

と書く．

$$|a_i^{\nu}-a_i|\leqq \mathrm{dist}(a(\nu),\ a)\leqq \sum_{i=1}^{n}|a_i^{\nu}-a_i|$$

であるから，（1）が点 a に収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\nu}(a_i^{\nu}-a_i)=0\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

である．

問 1. $\lim_{\nu} a(\nu)=a$ で，$A=\{a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(\nu),\ \cdots\}$ が無限集合であるときは a は点集合 A の集積点であることを証明する．

よく知られているように，（2）の意味は，くわしくいうと，ε がどんな正数であっても，ほとんどすべての $a(\nu)$ が不等式

$$(3)\quad \mathrm{dist}(a(\nu),\ a)<\varepsilon$$

を満足する，ということである（‘はじめに’ viii)）．よって，いま，（2）が成り立っているものとし，ε を任意の正数とすれば，$\nu\geqq\nu_0$ なるすべての ν に対し

$$\mathrm{dist}(a(\nu),\ a)<\frac{\varepsilon}{2}$$

であるように自然数 ν_0 を定めることができる．ゆえに，$\nu_1\geqq\nu_0$，$\nu_2\geqq\nu_0$ ならば

$$\mathrm{dist}(a(\nu_1),\ a(\nu_2))\leqq \mathrm{dist}(a(\nu_1),\ a)+\mathrm{dist}(a,\ a(\nu_2))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

一般に，どんな正数 ε を与えても，ほとんどすべての $a(\nu_1)$，ほとんどすべての $a(\nu_2)$ に対して不等式

$$\mathrm{dist}(a(\nu_1),\ a(\nu_2))<\varepsilon$$

が成り立つとき，点列（1）は**基本（点）列**もしくは **Cauchy 点列**であるといわれる．いま証明したことは，すなわち，（1）が収束するときは（1）は基本列であるということにほかならない．

逆に，いま，（1）が基本列であったとし，ε を任意の正数とするとき，$\nu_1\geqq\nu_0$，$\nu_2\geqq\nu_0$ ならば

$$\mathrm{dist}(a(\nu_1),\ a(\nu_2))<\varepsilon$$

であるとしてみる．

$$|a_i^{\nu_1}-a_i^{\nu_2}|\leqq\mathrm{dist}(a(\nu_1),\ a(\nu_2))<\varepsilon \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

だから，数列の収束定理によれば

$$\lim_{\nu} a_i^{\nu}=a_i \quad \text{すなわち} \quad \lim_{\nu}(a_i^{\nu}-a_i)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

なる a_i が存在するはずである．このことは，さきに示しておいたごとく，点列（1）が点 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に収束することを意味する．以上により

点列が収束するための必要十分条件はその点列が基本列であることである

ことがわかった．

問 2. $a(\nu)=a$ $(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$ のときは $\lim_{\nu} a(\nu)=a$ であることを示す．

問 3. $a(\nu_1),\ a(\nu_2),\ \cdots,\ a(\nu_k),\ \cdots$ を（1）の部分列とするとき，$\lim_{\nu} a(\nu)=a$ ならば $\lim_{k} a(\nu_k)=a$ であることを証明する．

§2. 有界な点列

点集合の直径が $+\infty$ でないとき，すなわち，

$$\sup\{\mathrm{dist}(x,\ y)\,|\,x\in A,\ y\in A\}\neq+\infty$$

のときは，A は**有界な点集合**であるという．$(a;\ b)$，$V(a;\ \rho)$ は有界な点集合である（II. §3，例，問 3）．

いま，A が有界な点集合であるとし，その直径が δ であるとする．a を定点，b を A にぞくする定点，x を A の任意の点とすれば

$$\mathrm{dist}(a,\ x)\leqq\mathrm{dist}(a,\ b)+\mathrm{dist}(b,\ x)\leqq\mathrm{dist}(a,\ b)+\delta$$

よって，$\rho>\mathrm{dist}(a,\ b)+\delta$ なる ρ に対しては

(1)　$\mathrm{dist}(a, x) < \rho$,

すなわち，$$A \subseteq V(a; \rho).$$

逆に，ある正数 ρ に対し(1)が成り立つときは，x, y がそれぞれ A のどんな点であっても $\mathrm{dist}(x, y) \leqq \mathrm{dist}(x, a) + \mathrm{dist}(a, y) < 2\rho$. ゆえに

$$\sup\{\mathrm{dist}(x, y) \mid x \in A, y \in A\} \leqq 2\rho.$$

すなわち，A は有界な点集合である．

点列

(2)　$a(\nu)$　$(\nu = 1, 2, \cdots)$

にぞくする点全部から成る集合 $\{a(1), a(2), \cdots, a(\nu), \cdots\cdots\}$ が有界な点集合であるとき，この点列は**有界**であるという．(1)からわかるように，点列(2)が有界であるとは a が定点であるとき

(3)　$\mathrm{dist}(a_\nu, a) < \rho$　$(\nu = 1, 2, \cdots)$

なるごとき正数 ρ があるということにほかならない．

いま，点列(2)が収束しその極限点が a である場合を考える．§1(3)において $\varepsilon = 1$ としたとすれば，ほとんどすべての $a(\nu)$ が不等式

(4)　$\mathrm{dist}(a(\nu), a) < 1$

を満足しているわけである．考えをはっきりさせるために，$\nu \geqq \nu_0$ ならば(4)が成り立つものとして，

$$\rho = \max\{\mathrm{dist}(a(1), a), \mathrm{dist}(a(2), a), \cdots, \mathrm{dist}(a(\nu_0 - 1), a)\} + 1$$

とおけば，この ρ に対しては(3)が成立することは明らかであろう．すなわち，

収束する点列は有界なのである．

§3. Cantor の共通点定理　前節の終りにのべた定理の逆はそのままでは成り立たない．ただし，**点列が有界なときには，かならず，その部分列のなかに収束するものが少なくとも一つある**ことが知られている．この定理の証明はつぎの定理をよりどころとして行なわれる：

ε がどんな正数であっても，有界点集合は直径が ε より小さい有限個の部分集合の和としてあらわされる．

注 意　これら有限個の部分集合を **ε 細胞**ということにし，この定理の内容をかんたんに‘有界点集合は ε 細胞分割ができる’ということばであらわすことにする．

この定理の証明は次節でのべることとし，ここではこれをもとにしてその前にのべた定理の証明をのべておく：

点列§2（2）は有界点列であるとし，$A=\{a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(\nu),\ \cdots\cdots\}$ とおく．A はもとより有界な点集合である．いま，

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_\nu,\ \cdots\cdots,\ \lim_{\nu}\varepsilon_\nu=0$$

は正数から成る減少数列であるとし，まず，A を ε_1 細胞にわける．ε_1 細胞は有限個しかないのだから，そのうちの少なくとも一つには点列の項が無限に多くはいっていなければならない．その ε_1 細胞の一つを A_1 とし，A_1 にぞくする点列の項をもとの順序をそこなわずに並べて得られる部分列を

（1）　$a(1,\ \nu)$　　$(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$

であらわす．つぎに，A_1 は明らかに有界点集合だから，これを ε_2 細胞にわけ，その ε_2 細胞のうち点列（1）の項を無限に多くふくむものの一つを A_2 であらわし，A_2 にぞくする点列（1）の項から成る部分列を

$$a(2,\ \nu)\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

であらわす．A_2 についてまた同様なことを行ない，さらにこのような手続きをかぎりなくくりかえして，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu,\ \cdots\cdots$$

なる点集合と，A_μ $(\mu=1,\ 2,\ \cdots)$ のおのおのにぞくする点から成る点列

（2）　$a(\mu,\ \nu)$　　$(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$

が得られたものとする．このとき，A_μ の直径は ε_μ より小さいこと，$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_\mu\supseteq A_{\mu+1}\cdots\cdots$ であること，ならびに点列（2）のうち μ の大きいものは μ の小さいものの部分列であることに注意する．

いま，点列（2）をもちいて

（3）　$a(\nu,\ \nu)$　　$(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$

なる点列をつくってみる．この点列（3）がもとの点列§2（2）の部分列であり，また，$\nu\geqq\mu$ ならばその項 $a(\nu,\ \nu)$ が A_μ にふくまれる点であることは明らかであろう．よって，点列（3）が基本列であることが示されれば証明はおわ

るわけである: ε を任意の正数とし，まず，$\varepsilon_\mu<\varepsilon$ なる μ をえらぶ.

$$\nu \geqq \mu \quad ならば \quad a(\nu,\ \nu)\in A_\mu$$

で，しかも A_μ の直径は ε_μ より小，したがって ε より小なのであるから，

$$\nu_1 \geqq \mu,\ \nu_2 \geqq \mu \quad ならば \quad \mathrm{dist}(a(\nu_1,\ \nu_1),\ a(\nu_2,\ \nu_2))<\varepsilon.$$

これは点列(3)が基本列であり，したがって収束点列であることにほかならない.

いま証明のおわった定理から，つぎの **Cantor（カントル）の共通点定理**が導かれる:

$F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_\nu,\ \cdots\cdots$ がいずれも空でない閉集合で

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_\nu \supseteq F_{\nu+1} \supseteq \cdots\cdots$$

であるとき，F_1 が有界ならば

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \neq \theta.$$

［証 明］ $a(\nu)\in F_\nu$ $(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$ なる点 $a(\nu)$ をとれば点列

$$a(\nu) \qquad (\nu=1,\ 2,\ \cdots)$$

は有界な点列であるから，

$$a(\nu_k) \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

なる収束部分列があるはずである. $a=\lim_k a(\nu_k)$，すなわち，$\lim_k \mathrm{dist}(a(\nu_k),\ a)=0$ とすれば，ν がどんな自然数でも $\nu_k \geqq \nu$ なるかぎり $a(\nu_k)\in F_\nu$ なのだから，$\mathrm{dist}(F_\nu,\ a)=0$. したがって，どの ν についても $a\in F_\nu{}^a=F_\nu$ (III. §4，問2). すなわち，$a\in\bigcap_{\nu=1}^{\infty}F_\nu$ だから $\bigcap_{\nu=1}^{\infty}F_\nu \neq \theta$.

§4. R^n における網目　前節で証明を保留しておいた細胞分割の定理を証明するために，R^n における網なるものを考える.

まず，点 $a=(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n)$ を任意の格子点とするとき，閉区間

$$[(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n);\ (\nu_1+1,\ \nu_2+1,\ \cdots,\ \nu_n+1)]$$

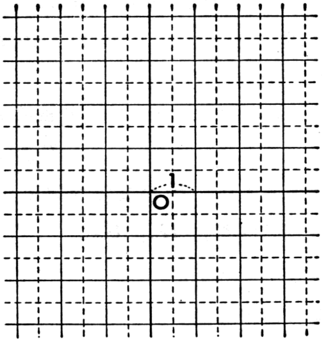
をつくり，これを (R^n における) 第1次の網目と名づける. また，これらすべての網目の集合を (R^n における) 第1次の網と称し，これを $\mathfrak{N}_1{}^n$ であらわす.

つぎに，$\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n$ を任意の整数とし，点 $\left(\dfrac{\nu_1}{2},\ \dfrac{\nu_2}{2},\ \cdots,\ \dfrac{\nu_n}{2}\right)$ を

第 2 次の格子点となづけ，閉区間

$$\left[\left(\frac{\nu_1}{2},\ \frac{\nu_2}{2},\ \cdots,\ \frac{\nu_n}{2}\right);\ \left(\frac{\nu_1+1}{2},\ \frac{\nu_2+1}{2},\ \cdots,\ \frac{\nu_n+1}{2}\right)\right]$$

を第 2 次の網目という．第 2 次の網目すべての集合を $\mathfrak{N}_2{}^n$ であらわし，これを第 2 次の網という．



IV-1 図

一般に，ν が自然数，ν_1，ν_2，…，ν_n が任意の整数であるとき，点 $\left(\frac{\nu_1}{2^{\nu-1}},\ \frac{\nu_2}{2^{\nu-1}},\ \cdots,\ \frac{\nu_n}{2^{\nu-1}}\right)$ を第 ν 次の格子点といい，閉区間

$$\left[\left(\frac{\nu_1}{2^{\nu-1}},\ \frac{\nu_2}{2^{\nu-1}},\ \cdots,\ \frac{\nu_n}{2^{\nu-1}}\right);\ \left(\frac{\nu_1+1}{2^{\nu-1}},\ \frac{\nu_2+1}{2^{\nu-1}},\ \cdots,\ \frac{\nu_n+1}{2^{\nu-1}}\right)\right]$$

を第 ν 次の網目と名づける．第 ν 次の網目全部の集合を第 ν 次の網と称し，これを $\mathfrak{N}_\nu{}^n$ であらわす．第 ν 次の網目の直径は

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{\nu-1}}$$

にひとしいことに注意する．

これだけ準備ができると，例の細胞分割の定理はすぐに出てくる：A は有界な点集合であるとし，ε を任意の正数とする．

$$n^{\frac{1}{2}}<2^{\nu-1}\varepsilon$$

なる ν をえらべば，上にのべたところにより，$\mathfrak{N}_\nu{}^n$ にぞくする網目の直径は ε より小さい．A が有界である以上，$\mathfrak{N}_\nu{}^n$ にぞくする網目のうち，A と共通点をもつ網目が有限個しかないことは明らかであろう． これら有限個の網目のおのおのと A との交わりをそれぞれ A_1，A_2，…，A_k であらわせば

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k.$$

また，網目自身の直径が ε より小さいのだから，A_1，A_2，…，A_k それぞれの直径も当然 ε より小さくなければならない．

注 意　網目は閉集合であるから，とくに有界集合 A が閉集合である場合には，A と網目との交わりである細胞はいずれも閉集合である． すなわち，有界閉集合は有限個の閉集合である ε 細胞に分割できるわけである．

§5. Borel-Lebesgue の被覆定理　細胞分割の定理と Cantor の定理をつかうとつぎの **Borel-Lebesgue (ボレル・ルベグ) の被覆定理**がえられる:

$G_\alpha(\alpha\in M)$ がいずれも開集合で

$$F\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha$$

であるとき，F が有界な閉集合ならば，$G_\alpha(\alpha\in M)$ のなかから有限個の開集合 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_k}$ をえらんで

$$F\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}G_{\alpha_\nu}$$

ならしめることができる.

注意　一般に $Y\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}X_\alpha$ であるとき，Y は $\{X_\alpha|\alpha\in M\}$ によって**被覆**されるという. このことばをつかえれば，上の定理はつぎのごとくいいかえられる:

有界な閉集合 F が $\{G_\alpha|\alpha\in M\}$ によって被覆されているときは，F は有限個の G_α から成る集合によってこれを被覆することができる.

［証 明］ ことばを簡単にするため，点集合が‘有限個の G_α から成る集合で被覆できる’とき，ここでは，その点集合は‘有限被覆可能’であるということにしておく. 証明は帰謬法によることとし，F は有限被覆可能でないと仮定してこの仮定から矛盾をみちびこうという方針をとることにする:

あらかじめ，最初に

$$\varepsilon_\nu>0,\ \varepsilon_\nu>\varepsilon_{\nu+1}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots),\quad \lim_\nu \varepsilon_\nu=0$$

であるような数列

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_\nu,\ \cdots\cdots$$

を一つきめておく.

そうした上で，まず，F に ε_1 細胞分割をほどこしてみる. このときもし，ε_1 細胞のいずれもが有限被覆可能ならば，ε_1 細胞の数は有限個なのであるから，F 自身が有限被覆可能となり，仮定にそむく結果になってしまう. よって，ε_1 細胞のなかには有限被覆可能でないものが少なくとも一つなくてはならない. その一つを F_1 であらわし，こんどは F_1 に ε_2 細胞分割をほどこす. 前と同じ理由でこれら ε_2 細胞のなかには有限被覆可能でないものがあるは

ずだから，その一つを F_2 とし，その F_2 に ε_3 細胞分割をほどこす……．一般に $F_{\nu-1}$ が得られたとき，これに ε_ν 細胞分割をほどこし，その ε_ν 細胞のうちで有限被覆可能でないものの一つを F_ν であらわす．この手続をかぎりなくくりかえせば

$$F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_\nu \supseteq F_{\nu+1} \supseteq \cdots\cdots$$

なる点集合列

$$F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_\nu,\ \cdots\cdots$$

が得られたことになる．なお，§4 注意により，F_1 が閉集合であるような ε_1 細胞分割をほどこしたものとし，以下，同様の理由により，順々に F_2，F_3，…，F_ν，…… がいずれも閉集合であるものとする．F_ν の直径が ε_ν より小さいことはいうまでもないであろう．

さて，F，したがって F_1 は有界閉集合なのであるから，Cantor の定理によれば

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \neq \theta.$$

よって，いま，$a \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ なる点 a をとれば $a \in F$ であるから，a は $G_\alpha(\alpha \in M)$ のうちのどれか少なくとも一つにふくまれていなくてはならない．その一つを G_{α_0} とすれば，G_{α_0} は開集合だから，$V(a;\ \rho) \subseteq G_{\alpha_0}$ なる a の球近傍 $V(a;\ \rho)$ があることはたしかである．$\lim_{\nu} \varepsilon_\nu = 0$ により，

$$\varepsilon_{\nu_0} < \rho$$

なる ν_0 をえらべば，F_{ν_0} の直径は ρ より小さく，しかも $a \in F_{\nu_0}$ であるから，

$$F_{\nu_0} \subseteq V(a;\ \rho) \subseteq G_{\alpha_0}.$$

これは，F_{ν_0} がただ一つの G_α で被覆されたことを意味し，F_{ν_0} が有限被覆可能でないということと矛盾する．かくして，F が有限被覆可能でないという仮定は矛盾に導くことがわかり否定されることになったわけである．

§6. 極限点と近傍 §1 においては点列

$$(1) \qquad a(\nu) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \cdots)$$

の収束とか，極限点とかを距離の概念をもちいて説明したが，ここでは，それ

らのことを近傍の概念をもとにした形に飜訳してみよう:

まず,

$$(2)\quad \lim_{\nu} \mathrm{dist}(a(\nu),\ a)=0$$

であるときは, ε がどんな正数であっても, ほとんどすべての $a(\nu)$ が不等式

$$\mathrm{dist}(a(\nu),\ a)<\varepsilon$$

を満足する. すなわち, ほとんどすべての ν に対し

$$a(\nu)\in V(a;\ \varepsilon)$$

である. よって $V(a)$ が a の任意の近傍であるとき, $V(a;\ \varepsilon)\subseteq V(a)$ なる a の球近傍 $V(a;\ \varepsilon)$ をとれば, ほとんどすべての ν に対し

$$a(\nu)\in V(a;\ \varepsilon)\subseteq V(a).$$

逆に, $V(a)$ が a のどんな近傍であってもほとんどすべての ν に対して

$$a(\nu)\in V(a)$$

であるとしてみる. ε を任意の正数とするとき, ほとんどすべての ν に対し

$$a(\nu)\in V(a;\ \varepsilon),\quad \text{したがって}\quad \mathrm{dist}(a(\nu),\ a)<\varepsilon.$$

いいかえれば, (2)が成り立つということになる.

以上のことから, §1における定義をあらためてつぎのようにのべることができることになった:

点 a のどの近傍 $V(a)$ をとっても, ほとんどすべての ν に対し

$$a(\nu)\in V(a)$$

であるとき, 点列(1)は(点 a に)収束するといい, a をこの点列の極限点と称する. また, このとき,

$$\lim_{\nu} a(\nu)=a,\quad \text{または}\quad a(\nu)\to a$$

と書く.

注意　$a(\nu)\in A$ $(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$, $a(\nu)\to a$ ならば $a\in A^a$ である.

ところで, このような定義を与えたとして, それでは, 点列(1)が二つの相ことなる極限点 a, b に収束することはないであろうか. そういうことのないことはつぎの定理がこれを保証してくれる.

V5)　$a\neq b$ ならば $V(a)\cap V(b)=\theta$ なるごとき a の近傍

$V(a)$ と b の近傍 $V(b)$ とが存在する.

これは，$2\rho=\mathrm{dist}(a,\ b)$ とおいて，$V(a)=V(a;\ \rho)$，$V(b)=V(b;\ \rho)$ とすれば明らかであろう.

問 x が A の集積点ならば，$V(x)$ が x のどの近傍であっても，$V(x)$ のなかには A の点が無限にたくさんあることを V5) をつかって証明する.

§7. Lindelöf の被覆定理 まず，つぎのような注意から話をはじめる: x を有理点とし，r をもって任意の正有理数をあらわすこととして，球近傍 $V(x;\ r)$ を考える. 有理点のこういう球近傍をとくに有理球近傍とよぶことにすれば，有理数の集合は可付番なのだから，定まった有理点の有理球近傍の集合も可付番集合であることは明らかである. ところで，R^n における有理点の集合はまた可付番であるから，R^n におけるすべての有理球近傍ばかりから成る集合を $\mathfrak{V}$ であらわすことにすれば，$\mathfrak{V}$ は明らかに可付番集合である (20 ページ).

つぎに，a を任意の点とし，$V(a)$ を任意の近傍とする. $V(a;2\rho)\subseteq V(a)$ なる a の球近傍 $V(a;\ 2\rho)$ をとれば，$(Q^n)^a=R^n$ なのであるから (III. §6, 例 1)，この球近傍の半径の半分を半径とする球近傍 $V(a;\ \rho)$ のなかには，かならず，有理点が存在するはずである. その一つを b とし，$\rho<r<2\rho-\mathrm{dist}(a,\ b)$ なる有理数 r をえらんで，b の有理球近傍 $V(b;\ r)$ をつくれば，明らかに $V(b;\ r)\subseteq V(a;\ 2\rho)$，$a\in V(b;\ r)$. $V(b;r)$ はもとより開集合なのだから，これは a の近傍の一つと考えることができる. すなわち，これで，$V(a)$ が a のいかなる近傍であっても，その近傍の部分集合でしかも a の近傍であるような有理球近傍があるということになったわけである.

これだけのことがわかった上は，つぎの **Lindelöf (リンデレフ) の被覆定理**はこれを容易に証明することができる: **任意の点集合 A が開集合から成る集合 $\{G_\alpha|\alpha\in M\}$ で被覆されているとき，G_α の集合のなかから可付番部分集合 $\{G_{\alpha_1},\ G_{\alpha_2},\ \cdots,\ G_{\alpha_\nu},\ \cdots\}$ をえらんで，この部分集合で A を被覆することができる.** すなわち，$A\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha$ な

らば $A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_{\alpha_\nu}$ であるように G_{α_1}, G_{α_2}, …, G_{α_ν}, …をえらぶことができる.

[証 明] x を A の任意の点とすれば，仮設により，$x\in G_\alpha$ なる G_α がかならずあるはずである. そういう G_α は x の近傍であるから，上に説明したところにより，G_α の部分集合でしかも x の近傍であるような有理球近傍がなければならない. いま，A の各点 x においてこのような有理球近傍を定めたものとする. これらの有理球近傍全部の集合は $\mathfrak{V}$ の部分集合であるから，当然可付番集合である. よって，これらの有理球近傍を U_1, U_2, …, U_ν, …… であらわすことにすれば，A のどの点も U_ν ($\nu=1, 2, \cdots$) のいずれかにふくまれるのだから，$A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}U_\nu$. したがって，$U_\nu$ を部分集合とする G_α の一つを G_{α_ν} であらわすことにすれば $A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_{\alpha_\nu}$.

§8. Borel-Lebesgue の被覆定理再説 Lindelöf の被覆定理を利用すると §5 で証明した Borel-Lebesgue の被覆定理の別証が得られる: 証明は帰謬法によるものとし，F が有界閉集合で $F\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha$ のとき F が有限被覆可能でないと仮定してみる. Lindelöf の被覆定理により，まず，$F\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_{\alpha_\nu}$ であるような G_{α_1}, G_{α_2}, …, G_{α_ν}, … があるわけであるが，仮定により，k がどんな自然数であっても

$$F\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}G_{\alpha_\nu}\qquad(k=1, 2, \cdots)$$

となることは決してないはずである. すなわち，

$$F_k=F\cap(\bigcup_{\nu=1}^{k}G_{\alpha_\nu})^c\qquad(k=1, 2, \cdots)$$

とおけば
$$F_k\neq\theta\qquad(k=1, 2, \cdots).$$

しかるに，F は有界閉集合，$(\bigcup_{\nu=1}^{k}G_\alpha)^c$ は開集合の余集合だから閉集合，したがって，F_k はいずれも閉集合で，$F_1\supseteq F_2\supseteq\cdots\supseteq F_k\supseteq F_{k+1}\supseteq\cdots\cdots$.

よって，Cantor の定理により

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=F\cap(\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{\nu=1}^{k}G_{\alpha_\nu})^c)$$
$$=F\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{\nu=1}^{k}G_{\alpha_\nu}))^c=F\cap(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_{\alpha_\nu})^c\neq\theta.$$

これは，$F\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_{\alpha_\nu}$ と矛盾する結果である.

Borel-Lebesgue の被覆定理はその逆も成立する: すなわち，

$$\boldsymbol{A \subseteq \bigcup_{\alpha \in M} G_\alpha}$$

なる $\boldsymbol{G_\alpha(\alpha \in M)}$ がどういう開集合であっても，いつでもそのなかから有限個 $\boldsymbol{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_k}}$ をえらんで

$$\boldsymbol{A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} G_{\alpha_\nu}}$$

ならしめうるときは，$\boldsymbol{A}$ は有界閉集合でなければならない．

［証 明］　まず，A は閉集合であることを証明する．それには $x \notin A$ ならば $x \notin A^a$ であることを示せばよいわけである：$y \in A$ とすれば，$x \neq y$ であるから，V5) により，$V_y(x) \cap V(y) = \theta$ であるような x の近傍 $V_y(x)$ と y の近傍 $V(y)$ とがあるはずである．よって A の各点 y についてこのような $V(y)$ と $V_y(x)$ とをえらべば $A \subseteq \bigcup_{y \in A} V(y)$．このとき，$V(y)$ は最初から開近傍であるようにとっておいたものとすれば，$V(y)$ のなかから有限個 $V(y(1))$, $V(y(2))$, $\cdots$, $V(y(k))$ をえらんで，$A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} V(y(\nu))$ ならしめることができる．x の近傍 $\bigcap_{\nu=1}^{k} V_{y(\nu)}(x)$ を $V(x)$ であらわせば，明らかに $V(x) \cap A = \theta$．これは $x \notin A^a$ ということにほかならない．

A が有界であることはつぎのようにして示される：a を A の定点とし，$G_\nu = V(a;\nu)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ とおけば，$A \subseteq R^n = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$．よって，$G_\nu$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ のなかから有限個 G_{ν_1}, G_{ν_2}, $\cdots$, G_{ν_k} をえらんで $A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} G_{\nu_k}$ ならしめることができる．よって，たとえば，$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots \leqq \nu_k$ であるとすれば，$A \subseteq G_{\nu_k} = V(a;\ \nu_k)$．これは A の直径が $V(a;\nu_k)$ の直径 $2\nu_k$ より大きくないことを示すものである．

ここに，Borel-Lebesgue の被覆定理から導かれる重要な定理としてつぎのものをあげておこう：

$\boldsymbol{F}$ は有界な閉集合，$\boldsymbol{F_\alpha(\alpha \in M)}$ はいずれも閉集合で

$$\boldsymbol{F_\alpha \subseteq F}$$

であるとする．このとき，もし，$\boldsymbol{F_\alpha(\alpha \in M)}$ のうちから有限個 $\boldsymbol{F_{\alpha_1}}$, $\boldsymbol{F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_k}}$ をどうえらんでも $\boldsymbol{\bigcap_{\nu=1}^{k} F_{\alpha_\nu} \neq \theta}$ ならば

$$\boldsymbol{\bigcap_{\alpha \in M} F_\alpha \neq \theta.}$$

［証 明］　かりに，$\bigcap_{\alpha \in M} F_\alpha = \theta$ であったとしてみる．　　$\bigcup_{\alpha \in M} F_\alpha{}^c$

$=(\bigcap_{\alpha\in M}F_\alpha)^c=R^n$ だから，もとより，$F\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}F_\alpha{}^c$．ここに，$F_\alpha{}^c$ は開集合である．よって，$F_\alpha{}^c$ のなかから有限個，$F_{\alpha_1}^c$, $F_{\alpha_2}^c$, …, $F_{\alpha_n}^c$ をえらんで $F\subseteq\bigcup_{\nu=1}^k F_{\alpha_\nu}^c$ ならしめることができることになる．しかるに，$F\supseteq F_{\alpha_1}$ なのであるから，$F^c\subseteq F_{\alpha_1}^c\subseteq\bigcup_{\nu=1}^k F_{\alpha_\nu}^c$．よって，$R^n=F\cup F^c=\bigcup_{\nu=1}^k F_{\alpha_\nu}^c$，すなわち，$\bigcap_{\nu=1}^k F_{\alpha_\nu}=(\bigcup_{\nu=1}^k F_{\alpha_\nu}^c)^c=\theta$．これは仮設と矛盾する結果である．

もう一つ，Borel-Lebesgue の被覆定理の応用として，**Weierstrass-Bolzano（ヴァイエルシュトラス・ボルツァノ）の定理**を証明しておこう：

A が有界な無限集合ならば，かならず，A の集積点が存在する：すなわち，$A^d\neq\theta$．

［証 明］ かりに A が集積点をもたないものとしてみる．$x\in A$ とすれば，もとより，x は A の集積点でありえない．すなわち，$x\notin(A-\{x\})^a$ なのだから，$V(x)\cap(A-\{x\})=\theta$ なるごとき x の開近傍 $V(x)$ があることになる．A の各点 x についてこのような $V(x)$ を定めれば，$A\subseteq\bigcup_{x\in A}V(x)$．しかるに，$A^d=\theta$ だから，$A^d\subseteq A$ で有界集合 A は閉集合である．よって，Borel-Lebesgue の被覆定理により，

$$A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^k V(x_\nu)$$

なる $V(x_1)$, $V(x_2)$, …, $V(x_k)$ があるはずである．ところが，$V(x_\nu)$ のなかには x_ν 以外には A の点ははいっていない．したがって，A は $x_1, x_2, \cdots, x_k$ という有限個の点だけから成る有限集合となって仮定にそむく結果がでてきた．これで帰謬法により証明が完成したわけである．

V. 連　続　写　像

§1.　点集合における開集合・閉集合　A を R^n における点集合とし，しばらく，A の部分集合について考える．

X が任意の点集合であるとき，$X'=X\cap A$ を A における X の跡（セキ）という．A における X の跡が A の部分集合であることはいうまでもない．また $A\subseteq X$ ならば X の跡は A であり，$X\subseteq A$ ならば X の跡は X 自身にほかならない．

A における開集合の跡を **A における開集合**，略して **A 開集合**という．つまり，G' が A 開集合であるとは

$$G'=G\cap A$$

なる開集合 G があることを意味するわけである．

注意 1.　A 自身が開集合のときは A 開集合とは A の部分集合である開集合のことにほかならない．

O1)，O2)，O3)（III. §1）からつぎの O′1)，O′2)，O′3) が得られる：

O′1)　A 開集合の結びは A 開集合である．

O′2)　有限個の A 開集合の交わりは A 開集合である．

O′3)　A および θ はそれぞれ A 開集合である．

問 1.　O′1)，O′2)，O′3) をたしかめる．

A 開集合の意味を上のように定めた上は，III 章 §3 にならって，A 閉集合をつぎのように定義するのは自然であろう：　$F'\subseteq A$ で，$G'=A-F'=A\cap F'^c$ が A 開集合であるとき，**F' は A における閉集合**，略して，**A 閉集合**という．

F' が A 閉集合のとき，$G'=A-F'=A\cap G$（G は開集合）とすれば，

$$F'=A-G'=A\cap G'^c=A\cap(A\cap G)^c=A\cap(A^c\cup G^c)$$
$$=(A\cap A^c)\cup(A\cap G^c)=\theta\cup(A\cap G^c)=A\cap G^c.$$

G^c は閉集合だから，この結果は A 閉集合が閉集合の A における跡であることを示す．逆に，F が閉集合であるとき，$F'=F\cap A$ とおけば，

$$A\cap F'^c=A\cap(F\cap A)^c=A\cap(F^c\cup A^c)=(A\cap F^c)\cup(A\cap A^c)$$
$$=(A\cap F^c)\cup\theta=A\cap F^c.$$

ここに F^c は開集合だから，$A\cap F'^c$ は A 開集合，したがって F' は A 閉集合である．これで，A 閉集合とは閉集合の Aにおける跡のことであるといっても上の定義と同じであることがわかった．

注意 2.　A 自身が閉集合のときは，A 閉集合とは A の部分集合である閉集合のことにほかならない．

O1), O2), O3) から F1), F2), F3) が導かれたように，O′1) O′2) O′3) からつぎの F′1), F′2), F′3) が導かれる:

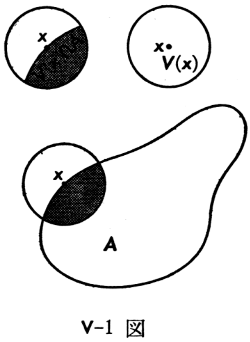
F′1)　A 閉集合の交わりは A 閉集合である．

F′2)　有限個の A 閉集合の結びは A 閉集合である．

F′3)　A および θ は A 閉集合である．

問 2.　F′1), F′2), F′3) をたしかめる．

§2.　点集合における近傍　x が A の点，$G'=G\cap A$ が A における開集合で，$x\in G'\subseteq X\subseteq A$ であるとき，X は点 x の **A 近傍**であるという．このとき，$x\in G\subseteq G\cup X$，したがって $G\cup X$ は x の近傍であるから，これを $V(x)$ であらわせば，$V(x)\cap A=(G\cap A)\cup(X\cap A)=G'\cup X=X$．これは，$x$ の A 近傍は x の近傍と A との交わりであることを示す．逆に，$V(x)$ は A の点 x の任意の近傍であるとし，$x\in G\subseteq V(x)$ とすれば，$x\in G\cap A\subseteq V(x)\cap A$．よって $V(x)\cap A$ は x の A 近傍であるということになる．けっきょく，A の点の A 近傍とはその点の近傍



V-1 図

と A との交わりのことであることがわかったわけである.

とくに, x の A 近傍が A における開集合であるときは, これを x の**点集合 A における開近傍**, または **A 開近傍**と称する.

x の A 近傍を一般に $V(x;\ A)$ であらわすことにすれば, III 章 §2 におけると同様にして, つぎの V′1), V′2), V″3), V′4) がえられる.

V′1) $x \in V(x;\ A)$

V′2) 有限個の x の A 近傍の交わりは x の A 近傍である.

V″3) $V(x;\ A)$ が x の任意の A 近傍であるとき, x の A 近傍 $V'(x;\ A)$ があって, $V'(x;\ A)$ のどの点 y に対しても $V(x;\ A)$ がその y の A 近傍になっている:

V′4) $V(x;\ A) \subseteq X \subseteq A$ ならば X は x の A 近傍である.

なお, V5) から,

V′5) $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ のときは, $V(x;\ A) \cap V(y;\ A) = \theta$ であるような x の A 近傍 $V(x;\ A)$, y の A 近傍 $V(y;\ A)$ がある.

点集合 A における近傍の概念をつかうと, A 開集合をつぎのように性格づけることができる: i) G' が A 開集合ならば G' はその各点の A 近傍である. ii) 逆に, A の部分集合 X がその各点の A 近傍ならば X は A 開集合である.

[証 明] i) $x \in G'$ とすれば G' が A 開集合である以上, 定義により, G' が x の A 近傍であることは明らかである. ii) $x \in X$ とすれば, X が x の A 近傍なのであるから, $x \in G'(x) \subseteq X$ なる A 開集合 $G'(x)$ があるはずである. X の各点 x についてかような $G'(x)$ をとったものと考えれば, $X \subseteq \bigcup_{x \in X} G'(x) \subseteq X$, よって, $X = \bigcup_{x \in X} G'(x)$. すなわち, X は A 開集合 $G'(x)$ の結びであるから, やはり, A 開集合でなければならない.

さらに, 点集合における近傍という概念をつかうと, Borel-Lebesgue の被覆定理をつぎのようにいい直すことができる:

A は有界な閉集合であるとし, A の各点 x に x の A 近傍 $V(x;\ A)$ が一つずつ与えられているとする: $A = \bigcup_{x \in A} V(x;\ A)$.

このとき，有限個の A の点 $\boldsymbol{x}(1)$，$\boldsymbol{x}(2)$，…，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$ をえらんで $A=\bigcup_{\nu=1}^{k}V(\boldsymbol{x}(\nu);\ A)$ ならしめることができる．

［証 明］ 定義により，A のどの点 x についても，$x\in G'(x)\subseteq V(x;\ A)$ なる A 開集合 $G'(x)$ がある．よって，$A=\bigcup_{x\in A}G'(x)$．$G'(x)=G(x)\cap A$ ($G(x)$ は開集合) とすれば，$A\subseteq\bigcup_{x\in A}G(x)$ であるから，Borel-Lebesgue の被覆定理により，$A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}G(x(\nu))$ なる $G(x(1))$，$G(x(2))$，…，$G(x(k))$ があるはずである．

$$A=A\cap\left(\bigcup_{\nu=1}^{k}G(x(\nu))\right)=\bigcup_{\nu=1}^{k}(A\cap G(x(\nu)))$$
$$=\bigcup_{\nu=1}^{k}G'(x(\nu))\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}V(x(\nu);\ A)\subseteq A$$

から，ただちに，$A=\bigcup_{\nu=1}^{k}V(x(\nu);\ A)$ がでてくる．

IV 章 §8 におけると同様にして，つぎの定理を証明することができる：

点集合 A の各点 $\boldsymbol{x}$ にその A における近傍 $V(\boldsymbol{x};\ A)$ が任意に与えられているとき，もし，いつでも，有限個の A の点 $\boldsymbol{x}(1)$，$\boldsymbol{x}(2)$，…，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$ を適当にえらんで $A=\bigcup_{\nu=1}^{k}V(\boldsymbol{x}(\nu);\ A)$ ならしめることができるならば，A は有界閉集合でなければならない．

問 この定理の証明をこころみる．

最後に，A の定点 a のすべての A 近傍の交わりは $\{a\}$ であることに注意しておく．まず，a がその交わりにふくまれていることは定義から明らかである．つぎに，$x\in A$，$x\neq a$ とし，V′5) により，$V(a;\ A)\cap V(x;\ A)=\theta$ であるような a の A 近傍 $V(a;\ A)$，x の A 近傍 $V(x;\ A)$ をとれば，$V(a;\ A)\subseteq A-V(x;\ A)$．明らかに $x\notin A-V(x;\ A)$ であるから，これで a とことなる A の点 x は a の A 近傍の交わりにはふくまれえないことが示されたわけである．

§3. 点で連続な写像

ここでは R^n における点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像 f を考える．

以下，R^n の点 x の近傍は $V(x)$，R^n の点集合 A の点 x の A 近傍

は $V(x;\ A)$ というように従来どおりの記号であらわし，$R^{n'}$ の点 x' の近傍は $V'(x')$, $R^{n'}$ の点集合 A' の点 x' の A' 近傍は $V'(x';\ A')$ であらわすことにする．なお，このほかに，たとえば $R^{n''}$ の点や点集合を考えるときは，$V''(x'')$, $V''(x'';\ A'')$ などの記号をつかうことにしておく．

$x\in A$ とし，x の f による像 $f(x)$ の任意の近傍 $V'(f(x))$ を与えたとき

$$(1)\quad f(V(x;\ A))\subseteq V'(f(x))$$

なるごとき x の A 近傍 $V(x;\ A)$ がいつでも存在するならば，写像 f は点 x で**連続**であるといわれる．$f(x)$ の任意の近傍 $V'(f(x))$ のかわりに，$A'=f(A)$ とおいて，$f(x)$ の任意の A' 近傍 $V'(f(x);\ A')$ を与えて，(1) のかわりに

$$(2)\quad f(V(x;\ A))\subseteq V'(f(x);\ A')$$

であるとしても，けっきょく，上の定義と同じになることに注意する．なお，(1)，(2) はそれぞれ

$$V(x;\ A)\subseteq f^{-1}[V'(f(x))],\ V(x;\ A)\subseteq f^{-1}[V'(f(x);\ A')]$$

と同意義であるから，V′4) により，f が点 x で連続であるとは，'$f^{-1}[V'(f(x))]$, あるいは，$f^{-1}[V'(f(x);\ A')]$ が x の A 近傍であることを意味する' といってもよいわけである．

f は，前のとおり，R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像，また，g は $A'=f(A)$ から $R^{n''}$ のなかへの写像であるとする．このとき，**もし f が A の点 x で連続で，g が A' の点 $x'=f(x)$ で連続ならば，A から $R^{n''}$ のなかへの写像 $g\circ f$ は x において連続である．**

［証明］ $x''=g(x')=g\circ f(x)$ とし，$V''(x'')$ を x'' の任意の近傍とし，まず，$g[V'(x';\ A')]\subseteq V''(x'')$ なる x' の A' 近傍 $V'(x';\ A')=V'(f(x);\ A')$ を定める．つぎに，この $V'(x';\ A')$ に対し，

$f(V(x;\ A))\subseteq V'(x';\ A')$ なる $V(x;\ A)$ をとれば $g\circ f(V(x;\ A))$
$=g[f(V(x;\ A))]\subseteq g(V'(x';\ A'))\subseteq V''(x'')$, すなわち

$$g\circ f(V(x;\ A))\subseteq V''(x'').$$

これは，$g\circ f$ が x で連続であることを示している．

f が R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像であるとし，a を A^a の 1 点とする．このとき，$R^{n'}$ の 1 点 b があって，b のどんな近傍 $V'(b)$ を与えても，

（3）　$f[V(a)\cap A-\{a\}]\subseteq V'(b)$

なるごとき a の近傍 $V(a)$ がいつでもある場合には，

（4）　$\lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)=b$

と書き，b を a における f の**極限点**と称する．（4）が成り立つときは $b\in(f(A))^a$ であることに注意する．

とくに，$a\in A$，$b=f(a)$ の場合を考えると，（3）は

（5）　$f[V(a)\cap A-\{a\}]\subseteq V'(f(a))$

となる．しかるに，もとより，$f(a)\in V'(f(a))$ だから，$V(a;\ A)=V(a)\cap A$ とおけば（5）から，ただちに

$$f(V(a;\ A))\subseteq V'(f(a))$$

が出てくる．ゆえに，$a\in A$ で

（6）　$\lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)=f(a)$

ならば，f は点 a で連続であるということになった．逆に，$f(x)$ が a で連続であるとき，（6）が成り立つことは明らかであろう．

§4.　点集合で連続な写像　R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像 f が A の各点で連続であるとき，f は **A で連続な写像**，ときには，単に**連続写像**であるという．

問 1.　f が A から $R^{n'}$ のなかへの写像であるとき，$B\subseteq A$ なる B の各点 x に $f(x)$ を対応させる写像を f_B であらわすとき，もし，f が A で連続ならば f_B は B で連続であることをたしかめる．

問 2.　A の各点 x に x 自身を対応させる写像 f は A で連続であることをたしかめる．

例によって，f は R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像であるとする．
i) f が A で連続ならば $R^{n'}$ における開集合の f による原像は A 開集合である．ii) 逆に，$R^{n'}$ におけるどの開集合をとっても，f

による その原像が A 開集合ならば f は A で連続な写像である.

［証 明］ i)　f は A で連続な写像, B' は $R^{n'}$ における開集合であるとし, $A'=f(A)$, $B=f^{-1}(B')$ とおく. $B=\theta$ ならば B はもとより開集合であるから, $B\neq\theta$ の場合だけを考える. $x\in B$, $x'=f(x)$ とおけば, B' は x' の近傍であるから, f が x で連続である以上, $B=f^{-1}(B')$ は x の A 近傍でなければならない. すなわち, B のどの点 x をとっても B は x の A 近傍なのだから, B は A 開集合である (§2).

ii)　$x\in A$, $x'=f(x)$, $A'=f(A)$ とし, $V'(x')$ を x' の任意の近傍とする. $x'\in G'\subseteq V'(x')$ なる開集合 G' をとれば, $x\in f^{-1}(G')\subseteq f^{-1}(V'(x'))$. 仮定によれば $f^{-1}(G')$ は A 開集合なのであるから, いま得られた関係式は $f^{-1}(V'(x'))$ が x の A 近傍であることを示す. これは f が A のどの点 x でも連続であるということにほかならない.

注 意 1.　f が A で連続な写像であるとき, G が A 開集合であっても, $f(G)$ は開集合であるとはかぎらない. たとえば, $A=R^1$ とし, f は x に x^2 を対応させる A から R^1 のなかへの写像とする. 開区間 $(-1;\ 1)$ は $A=R^1$ における開集合であるが, $f((-1;\ 1))=[0;\ 1)$ は開集合ではない.

A 開集合は A と A 閉集合の差であり, また, $R^{n'}$ における開集合は閉集合の余集合であることに注意すれば, 上の定理をつぎのようにいいなおしてもよいことがわかる: **i) f が A で連続ならば $R^{n'}$ における閉集合の f による原像は A 閉集合である. ii) 逆に, $R^{n'}$ のどの閉集合の f による原像も A 閉集合ならば f は A で連続な写像である.**

問 3.　A の各点に $R^{n'}$ の定点 a' を対応させる写像は A で連続であることをたしかめる.

注 意 2.　f が A で連続な写像であるとき, F が A 閉集合であっても $f(F)$ が閉集合であるとはかぎらない. たとえば, $A=R^1$ とし, f は x に $\frac{1}{1+x^2}$ を対応させる A から R^1 のなかへの写像であるとする. $[0;+\infty)$ は A 閉集合であるが, $f([0;+\infty))=(0;\ 1]$ は閉集合ではない.

注意 2 でのべたような事情であるだけに, つぎの定理は注目にあたいする:

A が R^n の有界閉集合, f が A から $R^{n'}$ のなかへの連続写像

ならば，$A'=f(A)$ は有界閉集合である.

［証 明］ $A'\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}G'_\alpha$ なる開集合 G'_α が与えられたとき，いつでも，そのなかから有限個 $G'_{\alpha_1}, G'_{\alpha_2}, \cdots, G'_{\alpha_k}$ をえらんで $A'\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}G'_{\alpha_\nu}$ ならしめうることを示せばよいわけである(IV. § 8)：x を A の任意の点とし，$f(x)\in G'_\alpha$ なる G'_α を $V'(f(x))$ と書くことにすれば，$A\subseteq\bigcup_{x\in A}f^{-1}[V'(f(x))]$，ここに $f^{-1}[V'(f(x))]$ は x の A 近傍である. よって，Borel-Lebesgue の被覆定理(§ 2)によれば，有限個の A の点 $x(1)$, $x(2)$, $\cdots$, $x(k)$ があって $A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}f^{-1}[V'\{f(x(\nu))\}]$. これを別の形に書きなおせば，すなわち，$A'=f(A)\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}V'\{f(x(\nu))\}$. $V'\{f(x(\nu))\}$ はそれぞれ G'_α の一つなのであるから，これを G'_{α_ν} と書くことにすれば，すなわち，$A'\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}G'_{\alpha_\nu}$.

いまの定理において，とくに，f が $A'=f(A)$ の上への 1 対 1 写像であるときは，A' の各点 x' に $f(x)=x'$ なる A の点 x を対応させる写像 f^{-1} (f の逆写像) が考えられる. $(f^{-1})^{-1}=f$ であることはいうまでもないであろう. いま，B を R^n における任意の閉集合とすれば $f_{A\cap B}$ は $A\cap B$ で連続(問 1)，$A\cap B$ は有界閉集合であるから，$f_{A\cap B}(A\cap B)=f(A\cap B)$ も (有界) 閉集合，したがって A' 閉集合である. $(f^{-1})^{-1}(B)=(f^{-1})^{-1}(A\cap B)=f(A\cap B)$ に注意すれば，これは f^{-1} が A' で連続なことを意味することがわかる. すなわち，つぎの定理が証明されたわけである: **R^n の有界閉集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像 f が A で連続でしかも 1 対 1 ならば，f の逆写像 f^{-1} も $A'=f(A)$ で連続である.**

一般に，f が任意の点集合 A から A' の上への 1 対 1 の写像で，f も A で連続，逆写像 f^{-1} も A' で連続であるとき，f は A から A' への**位相写像**とよばれる. f が位相写像であるときは，A 開集合は f によって A' 開集合に写像され，また A' 開集合は f^{-1} によって A 開集合に写像される. このようなところから，A から A' への位相写像があるとき，A は A' と**同相**であるといわれる. このことばをつかえば上の定理はつぎのようにのべることができる: **f が有界閉集合 A で連続な 1 対 1 写像ならば，f は位相写像であって，A は A' と同相である.**

問 4. A が A' と同相であることを $A\simeq A'$ であらわすとしてつぎのことを証明する: i) $A\simeq A$. ii) $A\simeq A'$ ならば $A'\simeq A$. iii) $A\simeq A'$, $A'\simeq A''$ ならば $A\simeq A''$.

§5. 連続写像と距離 §3では近傍の概念をつかって連続な写像の定義を与えたが，ここでは，この定義を距離のことばに翻訳してみることにする．

f は R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像であるとする．

A の点 x で f が連続である場合には，$V'(f(x);\ \varepsilon)$ を $f(x)$ の任意の球近傍とするとき，

$$f(V(x;\ A))\subseteq V'(f(x);\ \varepsilon)$$

なる x の A 近傍 $V(x;A)$ がなければならない． いま，$x\in G'\subseteq V(x;A)$, $G'=G\cap A$ (G は開集合) とし，$V(x;\ \delta)\subseteq G$ なる x の球近傍$V(x;\ \delta)$ をとれば，$V(x;\ \delta)\cap A\subseteq G'\subseteq V(x;\ A)$ であるから，

$$(1)\quad f(V(x;\ \delta)\cap A)\subseteq V'(f(x);\ \varepsilon).$$

逆に，$f(x)$ のどんな球近傍 $V'(f(x);\ \varepsilon)$ を与えても，かならず，(1)を満足するような x の球近傍 $V(x;\ \delta)$ があるとしてみる．$V'(f(x))$ を $f(x)$ の任意の近傍とし，$V'(f(x);\ \varepsilon)\subseteq V'(f(x))$ なる $f(x)$ の球近傍 $V'(f(x);\ \varepsilon)$ をとって，その $V'(f(x);\ \varepsilon)$ に対して (1) を満足するような $V(x;\ \delta)$ をえらべば，明らかに

$$f(V(x;\ \delta)\cap A)\subseteq V'(f(x)).$$

$V(x;\ \delta)\cap A$ は x の A 近傍なのであるから，これは f が x で連続であることを意味する．

以上のべたことをまとめれば，$f(x)$ の球近傍 $V'(f(x);\ \varepsilon)$ を任意に与えたとき，いつでも，(1) を満足するような x の球近傍 $V(x;\ \delta)$ のあることが，x で f が連続であるための必要十分条件であるということになる．

この必要十分条件をもう一度いいかえるとつぎのようになる: 正数 ε を任意に与えたとき，

$$(2)\quad y\in A,\ \mathrm{dist}(x,\ y)<\delta \text{ ならば } \mathrm{dist}(f(x),\ f(y))<\varepsilon$$

であるような正数 δ がかならずあることが f の x で連続であるための必要十

分な条件である.

（2）における δ の大きさは ε の大きさに応じて定められる. いわば, δ は ε の函数のようなものである. もっとも, 与えられた ε に対して δ が（2）を満足するとき, δ のかわりに $0<\delta'<\delta$ なる δ' をおきかえても（2）はやはり成立するから,（2）を満足する δ は一意には定まらない. （2）を満足する δ の上限を $\bar{\delta}$ とすれば, δ のかわりに $\bar{\delta}$ をおきかえても（2）は成立し, $\bar{\delta}$ は ε の函数であるということになる.

例 a, b を R^n の相ことなる2点とし, R^1 の閉区間 $[0; 1]$ の点 λ に R^n の点 $a+\lambda(b-a)$ を対応させる写像を f とすれば, f は連続写像である: $\mathrm{dist}(a+\lambda(b-a), a+\lambda'(b-a))=\mathrm{dist}(0, (\lambda-\lambda')(b-a))=|\lambda-\lambda'|\,\mathrm{dist}(0, b-a)=|\lambda-\lambda'|\,\mathrm{dist}(a, b)$ (II. §3 問1, 問2) であるから, $\delta\,\mathrm{dist}(a, b)<\varepsilon$ なる δ をとれば, $|\lambda'-\lambda|<\delta$ なるとき $\mathrm{dist}(f(\lambda'), f(\lambda))<\varepsilon$. ゆえに, f は λ において連続である.

いまのべたことは x が A の定点であるとしての話である. f が点集合 A で連続な写像である場合に x が A の任意の点をあらわすとすると,（2）における δ の大きさは ε の大きさばかりでなく, 点 x の位置に応じて定まる. いわば, δ は ε と x との函数のようなものである. ε を与えたとき, 上記の例のように A のすべての点 x に対して（2）が成り立つような δ があるとはかぎらない.

とくに, 正数 ε を任意に与えたとき, A のすべての点 x に対し（2）を満足するような δ——ε の大きさだけで定められ, x の位置に関係のない δ——があるような場合, つまり

（3） $x\in A,\ y\in A\ \ \mathrm{dist}(x, y)<\delta$ ならば $\mathrm{dist}(f(x), f(y))<\varepsilon$

なるごとき δ があるような場合, 写像 f は **A で一様連続**であるといわれる.

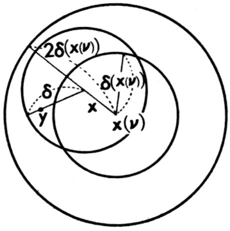
一様連続についてはつぎの定理がある:

f が R^n の有界閉集合 A から $R^{n'}$ のなかへの連続写像であるときは, f は A で一様連続である.

［証明］ 正数 ε を与えたとき, A の各点 x において

$$y\in A,\ \mathrm{dist}(x, y)<2\delta \text{ ならば } \mathrm{dist}(f(x), f(y))<\frac{\varepsilon}{2}$$

であるような δ を $\delta(x)$ であらわすことにする．$A\subseteq\bigcup_{x\in A}V(x;\ \delta(x))$ であるから，Borel-Lebesgue の被覆定理(§ 2)により，有限個の A の点 $x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(k)$ をうまくえらべば $A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{k}V[x(\nu);\ \delta(x(\nu))]$ ならしめることができる．$\delta=\min\{\delta(1),\ \delta(2),\ \cdots,\ \delta(k)\}$ とおけば(3)が成り立つことはつぎのようにして示される: $x\in A,\ y\in A,\ \mathrm{dist}(x,\ y)<\delta$, $x\in V[x(\nu);\ \delta(x(\nu))]$ であるとしてみる．まず，$\delta(x(\nu))$ の定義により，$\mathrm{dist}[f(x), f(x(\nu))]<\frac{\varepsilon}{2}$.



V-2 図

つぎに，$\mathrm{dist}(x(\nu),\ y)\leqq\mathrm{dist}(x(\nu),\ x)+\mathrm{dist}(x,\ y)<\delta(x(\nu))+\delta<2\delta(x(\nu))$.
よって，ふたたび，$\delta(x(\nu))$ の定義により，$\mathrm{dist}[f(x(\nu)), f(y)]<\frac{\varepsilon}{2}$. 以上のことから，

$$\mathrm{dist}(f(x),\ f(y))\leqq\mathrm{dist}[f(x), f(x(\nu))]+\mathrm{dist}[f(x(\nu)),\ f(y)]<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

が，ただちに，でてくる．これで定理の証明は終りである．

注 意　この節でさきにあげた例では $[0;\ 1]$ が有界閉集合であることに注意する．

§6.　写像の列　R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像の列

(1)　$f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_\nu,\ \cdots\cdots$

を考える．x を A の点とすれば

(2)　$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_\nu(x),\ \cdots\cdots$

は $R^{n'}$ における一つの点列であるが，A の各点 x に対し点列(2)が収束するとき，写像列(1)は A で収束するといわれる．このとき，点列(2)の極限点を $f(x)$ であらわし，A の各点 x に $R^{n'}$ の点 $f(x)$ を対応させる写像を f であらわすことにすれば，ここに A から $R^{n'}$ のなかへの写像 f がえられたことになる．f を写像列(1)の**極限写像**と称し，$\lim_\nu f_\nu=f$ と書く．

とくに，(1)の写像がすべて A で連続であるとき，(1)が A で収束しても，その極限写像 f は A で連続であるとはかぎらない:

例　$A=R^1$ とし，A の各点 x に R^1 の点 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^\nu}$

を対応させる写像を f_ν とする．f_ν が連続な写像であることは明らかであるが，$\lim_\nu f_\nu(0)=0$ で，$x\neq 0$ ならば $\lim_\nu f_\nu(x)=1+x^2$ であるから，この写像列は収束はするが，その極限写像は $x=0$ で不連続である．

それならば，どういう場合に極限写像も連続になるか，これに答えるためには，まず，つぎのような準備を必要とする．

点列(2)が点 $f(x)$ に収束するとは，正数 ε を任意に与えたとき

(3)　$\nu\geqq\nu_0$ ならば $\mathrm{dist}(f_\nu(x),\ f(x))<\varepsilon$

であるように自然数 ν_0 を定めうることを意味する．ν_0 の値は，もとより，ε の大きさによって左右されるが，また，x の位置いかんによっても変化するのがふつうである．とくに，ε を与えたとき，A のどの点 x に対しても(3)が成り立つように一定の ν_0 をえらびうる場合には，写像列(1)は A で(f に)**一様収束**するといわれる．(1)が A で一様収束するとは，いいかえれば，正数 ε を任意に与えたとき，

$$\nu\geqq\nu_0 \text{ ならば } \sup\{\mathrm{dist}(f_\nu(x),\ f(x))\mid x\in A\}<\varepsilon$$

なるごとき自然数 ν_0 があることであるというのと同じことに帰する．

これだけの準備をすると，さきにかかげた問題に対してつぎのような定理をもって答えることができる．

写像列(1)が A で一様収束し，また(1)にぞくする写像 f_ν がいずれも A で連続であるときは，その極限写像 f は A で連続である．

［証明］ a を A の任意の点，η を任意の正数とする．$\eta=3\varepsilon$ とおき，A のすべての点 x に対して(3)が成り立つように ν_0 を定める．

$$\mathrm{dist}(f(x),\ f(a))\leqq\mathrm{dist}(f(x),\ f_{\nu_0}(x))+\mathrm{dist}(f_{\nu_0}(x),\ f_{\nu_0}(a))$$
$$+\mathrm{dist}(f_{\nu_0}(a),\ f(a))$$

であるから，$\mathrm{dist}(x,\ a)<\delta$ ならば $\mathrm{dist}(f_{\nu_0}(x),\ f_{\nu_0}(a))<\varepsilon$ であるように正数 δ をえらぶときは，$\mathrm{dist}(x,\ a)<\delta$ なる A の点 x に対しては

$$\mathrm{dist}(f(x),\ f(a))<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=\eta.$$

これは点 a で f が連続であることを意味する．a が A のどの点であってもこ

のことがいえるのであるから，これで f の A で連続であることがわかったわけである．

問　A で写像列 (1) が一様収束するための必要十分条件は ε がどんな正数であってもAのすべての点 x において

$$\nu_1 \geqq \nu_0,\ \nu_2 \geqq \nu_0 \quad \text{ならば} \quad \mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x),\ f_{\nu_2}(x)) < \varepsilon$$

であるような（x にかかわりのない）自然数 ν_0 があることであることを証明する．

§7. 連続函数　R^n の点集合 A を定義域とする点函数，いいかえれば n 変数の函数は A から R^1 のなかへの写像にほかならない．したがって，この章でいままでのべてきたことは，$n'=1$ とすれば，そのまま函数の場合にもあてはまるわけである．この場合，R^1 の 2 点 x'，y'（じつは 2 数 x'，y'）の距離は $|x'-y'|$ であることに注意する．すなわち，A の点 x で函数 f が連続であるとは，ε が任意の正数であるとき

$$y \in A,\ \mathrm{dist}(x,\ y) < \delta \ \text{ならば，} \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon \ \text{すなわち}$$
$$-\varepsilon < f(x)-f(y) < \varepsilon$$

なるごとき正数 δ があることを意味するのである．

例 1.　点 x の第 1 座標 x_1 を x の函数と考えれば x_1 は R^n で連続函数である．このことは不等式

$$\mathrm{dist}(x,\ y) < \varepsilon \quad \text{ならば} \quad |x_1-y_1| \leqq \mathrm{dist}(x,\ y) < \varepsilon$$

であることから，ただちに，みてとることができる．第 2 座標，第 3 座標，…，第 n 座標のおのおのについても同様のことがいわれる．

例 2.　a を R^n の定点とするとき，$\mathrm{dist}(x,\ a)$ を x に対応させる函数は R^n で連続な函数である：

D3) により，$\mathrm{dist}(x,\ a)-\mathrm{dist}(y,\ a) \leqq \mathrm{dist}(x,\ y)$，$\mathrm{dist}(y,\ a)-\mathrm{dist}(x,\ a) \leqq \mathrm{dist}(y,\ x)$ であるから，$|\mathrm{dist}(x,\ a)-\mathrm{dist}(y,\ a)| \leqq \mathrm{dist}(x,\ y)$．ゆえに，$\mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon$ ならば $|\mathrm{dist}(x, a)-\mathrm{dist}(y, a)| < \varepsilon$．これは x でこの函数が連続であることを示している．

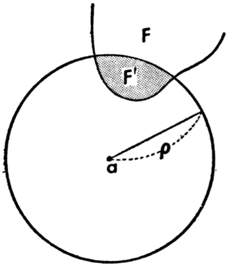
問 1.　f が R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの写像であるとき，つぎのことを証明する：$f(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_{n'}(x))$ ならば，f が A で連続写像であるための必要十分条件は函数 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_{n'}$ が A で連続な函数であることである．

問 2.　A を R^n の点集合とするとき，$\mathrm{dist}(x,\ A)$ を x に対応させる函数は R^n で連続な函数であることを証明する．

f が R^n の有界閉集合 A で連続な函数であるときは $A'=f(A)$ は R^1 における有界閉集合である．$M=\sup A'$ とおけば，上限の定義により，ε がどんな正数であっても

$$x\in A,\ M\geqq f(x)>M-\varepsilon,\quad \text{すなわち}\quad x\in A,\ f(x)\in V(M;\ \varepsilon)$$

なる x があるはずである．これは M が A' の触点であること，いいかえれば $M\in A'^a$ であることを意味する．ところで，A' は閉集合であるから $A'^a=A'$，よって $M\in A'$．すなわち，$f(x)=M$であるような A の点 x があるということになった．同様にして，$m=\inf A'$ とおけば $f(y)=m$ であるような A の点 y があることが証明される．すなわち，M, m は，それぞれ，じつは，f のとりうる最大の値，最小の値にほかならない．以上えた結果をつぎのようにいいあらわす： **有界閉集合で連続な函数は最大値および最小値を有する.**



V-3 図

例 3. a を R^n の点，F を R^n の閉集合とする．$\rho>\mathrm{dist}(a,\ F)$ とすれば，$F'=F\cap(V(a;\ \rho))^a$ は有界閉集合で，明らかに $\mathrm{dist}(a,\ F)=\mathrm{dist}(a,\ F')$ である．(V-3図) R^n で連続な函数 $\mathrm{dist}(x,\ a)$ は F' でも連続であるから，(§4，問1)，$\mathrm{dist}(b, a)=\inf\{\mathrm{dist}(x, a)\,|\,x\in F'\}=\mathrm{dist}(a, F')=\mathrm{dist}(a, F)$ なる F' (したがって F) の点 b があるはずである．よって，もし $\mathrm{dist}(a,\ F)=0$ ならば，$\mathrm{dist}(b,\ a)=0$，したがって，$b=a$．すなわち，$a\in F$ でなければならない．逆に，$a\in F$ ならば $\mathrm{dist}(a,\ F)=0$ であることはいうまでもない．すなわち，F が閉集合であるとき $a\in F$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{dist}(a,\ F)=0$ であることがわかった．このことをいいかえれば，$a\notin F$ であるための必要十分条件は $\mathrm{dist}(a,\ F)>0$ であるということになるわけである．

例 4. F を有界閉集合，F' を閉集合とする．$\mathrm{dist}(x,\ F')$ は F で連続な函数だから (問2，§4 問1)，$\mathrm{dist}(a,\ F')=\inf\{\mathrm{dist}(x,\ F')\,|\,x\in F\}=\mathrm{dist}(F,\ F')$ なる点 F の点 a があるはずである．よって，もし，$\mathrm{dist}(F,\ F')=0$ ならば，$\mathrm{dist}(a,\ F')=0$．したがって，例3により，$a\in F'$．ゆえに，$F\cap F'\neq\theta$．逆に，$F\cap F'\neq\theta$ なるとき $\mathrm{dist}(F,\ F')=0$ であることはいうまでもない．この結果をいいかえれば，$F\cap F'=\theta$ なるための必要十分条件は $\mathrm{dist}(F,\ F')>0$ であるということになる．なお，例3によれば，$b\in F'$，$\mathrm{dist}(a,\ b)=\mathrm{dist}(a,\ F')=\mathrm{dist}(F,\ F')$ なる F' の点 b があるのであるか

ら，けっきょく，$a \in F$, $b \in F'$, $\mathrm{dist}(a, b) = \mathrm{dist}(F, F')$ なる 2 点 a, b があることになるのに注意する．

注意 F も F' も有界でないときには，$F \cap F' = \theta$ でも $\mathrm{dist}(F, F') = 0$ のことがある(II. §4，例 2)．

最後に函数が連続であるための必要十分条件を一つあげておこう．函数の場合には §4 でのべた写像の連続であるための条件を少し変形してのべることができるのである：

まず，f は A で連続な函数であるとする．γ が任意の実数であるとき，$[\gamma; +\infty)$ は R^1 における閉集合であるから，集合 $\{x | x \in A,\ f(x) \geqq \gamma\} = f^{-1}([\gamma; +\infty))$ は A 閉集合でなければならない．同様なしかたにより，$\{x | x \in A,\ f(x) \leqq \gamma\}$ が A 閉集合であることが示される．

逆に，γ がどんな実数である場合であっても，$\{x | x \in A,\ f(x) \geqq \gamma\}$ および $\{x | x \in A,\ f(x) \leqq \gamma\}$ が A 閉集合であるとしてみる．a を A の任意の点，ε を任意の正数とすれば，$f^{-1}(V'(f(a); \varepsilon)) = f^{-1}[(f(a) - \varepsilon;\ f(a) + \varepsilon)] = \{x | x \in A,\ f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon\} = A - [\{x | x \in A, f(x) \geqq f(a) + \varepsilon\} \cup \{x | x \in A,\ f(x) \leqq f(a) - \varepsilon\}]$ は A 開集合で，もとより，$a \in f^{-1}[(f(a) - \varepsilon;\ f(a) + \varepsilon)]$．すなわち，$f^{-1}[(f(a) - \varepsilon;\ f(a) + \varepsilon)]$ は a の A 近傍である．よって，これを $V(a)$ であらわせば，$f(V(a)) \subseteq V'(f(a); \varepsilon)$．これは f が点 a で連続であることを意味する．a は A の任意の点であるから，これで f が A で連続であることが示されたわけである．

以上をまとめれば，**函数 f が A で連続であるための必要十分条件は，任意の数 γ に対し，$\{x | x \in A,\ f(x) \geqq \gamma\}$ および $\{x | x \in A,\ f(x) \leqq \gamma\}$ が A 閉集合であることである．**

VI. 連　結　集　合

§1.　連結集合　R^1 における線分(閉区間)[0; 1] は常識的に連結した集合と考えられる．これに反し，たとえば，Cantor の 3 進集合は連結した集合とはいわれない．また，R^2 において‘円板’ $\{(x_1, x_2) | x_1{}^2 + x_2{}^2 \leqq 1\}$ は連結した集合であるが，これを x_2 軸でたちわった集合 $\{(x_1, x_2) | x_1{}^2 + x_2{}^2 \leqq 1, x_1 \neq 0\}$ は連結していない集合と考えられる．それならば，‘連結している’，‘連結していない’ はどうやって判定するか．これについての定義から，この章ははじまる．

点集合 A がたがいに交わらない空でない二つの A 閉集合の結びとしてあらわしえないとき，A は**連結集合**であるという．すなわち，

(1)　$A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) = A \cap (F_1 \cup F_2)$, $A \cap F_1 \cap F_2 = \theta$,
$A \cap F_1 \neq \theta$, $A \cap F_2 \neq \theta$

なる閉集合 F_1, F_2 が決してないとき，A は連結集合であるといわれるのである．あるいは，また，

(2)　$A = A \cap (F_1 \cup F_2)$, $A \cap F_1 \cap F_2 = \theta$

なる閉集合 F_1, F_2 をとれば，かならず，$A \cap F_1 = \theta$ か $A \cap F_2 = \theta$ であるとき，A を連結集合という，といっても同じことである．さらには，また，

(3)　$A = A \cap (F_1 \cup F_2)$, $A \cap F_1 \neq \theta$, $A \cap F_2 \neq \theta_2$

なる閉集合 F_1, F_2 をとれば，かならず，$A \cap F_1 \cap F_2 \neq \theta$ であるとき，A を連結集合というといっても，やはり，同じことに帰するわけである．

注意 1.　とくに A 自身が閉集合の場合には，$A \cap F_1$, $A \cap F_2$ は閉集合であるから，上記(1)，(2)，(3) のかわりにそれぞれ

(1′)　$A = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \theta$, $F_1 \neq \theta$, $F_2 \neq \theta$ なる閉集合 F_1, F_2 はない

(2′)　$A = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \theta$　ならば　$F_1 = \theta$ か $F_2 = \theta$.

(3′)　$A = F_1 \cup F_2$, $F_1 \neq \theta$, $F_2 \neq \theta$　ならば　$F_1 \cap F_2 \neq \theta$

としてもよいわけである．ここに，F_1, F_2 はもとより閉集合をあらわすものとする．

例 1.　$\{x\}$ は連結集合である．

例 2. R^n は連結集合である: R^n は閉集合であるから，これが連結集合であることを証明するのには，$R^n=F_1\cup F_2$，$F_1\neq\theta$，$F_2\neq\theta$ なる閉集合 F_1，F_2 があれば，かならず，$F_1\cap F_2\neq\theta$ であることを示せばよいわけである．まず，$F_1{}^a=F_1$，$F_2{}^a=F_2$，つぎに，$F_1{}^c=F_1{}^c\cap R^n=(F_1{}^c\cap F_1)\cup(F_1{}^c\cap F_2)=\theta\cup(F_1{}^c\cap F_2)$，すなわち，$F_1{}^c=F_1{}^c\cap F_2$ であるから，$F_1{}^c\subseteq F_2$，したがって，$F_1{}^{ca}\subseteq F_2{}^a=F_2$．よって，$F_1{}^l=F_1{}^a\cap F_1{}^{ca}\subseteq F_1\cap F_2$．しかるに，II 章 §6 によれば，$F_1{}^l\neq\theta$ であるから，当然，$F_1\cap F_2\neq\theta$ でなければならない．

例 3. R^1 における閉区間 $[\alpha;\ \beta]$ は連結集合である: $[\alpha;\ \beta]$ は閉集合であるから，注意 1 の (3′) によって証明する．$[\alpha;\ \beta]=F_1\cup F_2$，$F_1\neq\theta$，$F_2\neq\theta$ とし，$\alpha\in F_1$ であるとしてみる．$\gamma=\inf F_2$ とおけば，$\gamma\in F_2{}^a=F_2$．このとき，もし，$\alpha<\gamma$ ならば，γ の任意の球近傍 $V(\gamma;\ \rho)$ に F_1 の点があるわけであるから，$\gamma\in F_1{}^a=F_1$．また，$\gamma=\alpha$ ならば，もとより，$\gamma\in F_1$．いずれにしても，$F_1\cap F_2\neq\theta$ である．

例 4. R^2 において $A=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1{}^2+x_2{}^2\leqq 1,\ x_1\neq 0\}$ は連結でない集合である: $F_1=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1{}^2+x_2{}^2\leqq 1,\ x_1\geqq 0\}$，$F_2=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1{}^2+x_2{}^2\leqq 1,\ x_1\leqq 0\}$ とおけば，$A\subseteq F_1\cup F_2=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1{}^2+x_2{}^2\leqq 1\}$ であるから，$A=A\cap(F_1\cup F_2)$，$A\cap F_1\cap F_2=\theta$，$A\cap F_1\neq\theta$，$A\cap F_2\neq\theta$ である．F_1，F_2 が閉集合であることは明らかである．

問 1. R^1 において Cantor の 3 進集合 C が連結でない集合であることを証明する．

もう一度，連結集合の定義を考えなおしてみる．(1) において，$A\cap F_1=A-(A\cap F_2)=A\cap(A\cap F_2)^c=A\cap(A^c\cup F_2{}^c)=(A\cap A^c)\cup(A\cap F_2{}^c)=A\cap F_2{}^c$，ここで $F_2{}^c$ は開集合であるから，$A\cap F_1$ は，じつは，A 開集合にほかならない．$A\cap F_2$ も同様に A 開集合である．よって，上記の定義をいいなおして，A がたがいに交わらない空でない二つの A 開集合の結びとしてあらわされないとき，くわしくいえば，

$$A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)=A\cap(G_1\cup G_2),$$
$$A\cap G_1\cap G_2=\theta,\quad A\cap G_1\neq\theta,\quad A\cap G_2\neq\theta$$

なる開集合 G_1, G_2 が決してないとき，A は連結集合であるといってもよいことがわかる．(2)，(3) をつかった定義においても，F_1, F_2 を G_1, G_2 でおきかえ，‘閉集合’ということばを‘開集合’でおきかえてもよいことはいうまでもない．

注意 2. とくに A が開集合のときは $A\cap G_1$，$A\cap G_2$ は開集合であるから，注意 1 でのべたことにおいて閉集合を開集合でおきかえると，そのまま，あてはまることに注意する．

なお，上に見たところにより，A が連結集合であるとは A および θ 以外には A 閉集合で同時に A 開集合であるような A の部分集合がないことを意味するといってもよいことは明らかであろう．

問 2. 2点以上から成る連結集合は自己稠密であることを証明する．

連結集合に関する定理として最初につぎの定理をあげておこう：**A が連結集合で，$A \cap B \neq \theta$，$A \cap B^c \neq \theta$ ならば A は B の境界点を少なくとも一つはふくんでいる．すなわち，$A \cap B^l \neq \theta$．**

[証明] $R^n = B^a \cup B^{ca}$ であるから，$A = A \cap R^n = A \cap (B^a \cup B^{ca}) = (A \cap B^a) \cup (A \cap B^{ca})$．ここに B^a，B^{ca} はいずれも閉集合であるから，A が連結集合である以上，$A \cap B^a \cap B^{ca} \neq \theta$ でなければならない．$B^l = B^a \cap B^{ca}$ であるから，これは $A \cap B^l \neq \theta$ を意味する．

注意 3. II章§6において，$A \neq \theta$，$A \neq R$ ならば A の境界点が存在することの証明を与えておいたが，後に示すように一般に連続曲線は連結集合なので，あのときの証明は，いま上にのべた定理の証明の特別な場合にあたっているわけである．

§2. 連結集合であるための条件

まず，つぎの定理からはじめる：**A が連結集合ならば A^a も連結集合である．さらに，一般に，同じ仮説のもとに $A \subseteq B \subseteq A^a$ なる B は連結集合である．**

[証明] $B = B \cap (F_1 \cup F_2)$，$B \cap F_1 \cap F_2 = \theta$ (F_1，F_2 は閉集合)であるとしてみる．$A \subseteq B$ であるから，$A = A \cap B = A \cap B \cap (F_1 \cup F_2) = A \cap (F_1 \cup F_2) = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)$，$A \cap F_1 \cap F_2 = A \cap B \cap F_1 \cap F_2 = \theta$．よって，$A$ が連結である以上 $A \cap F_1 = \theta$ か $A \cap F_2 = \theta$ でなければならない．まず，$A \cap F_1 = \theta$ とすれば，$A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) = \theta \cup (A \cap F_2) = A \cap F_2$，すなわち，$A \subseteq F_2$．ここに，$F_2$ は閉集合であるから，$A^a \subseteq F_2{}^a = F_2$．よって，$B \subseteq F_2$，すなわち，$B \cap F_1 = (B \cap F_2) \cap F_1 = \theta$．つぎに，$A \cap F_2 = \theta$ とすれば，いまと同様にして $B \cap F_2 = \theta$ がえられる．これは B が連結集合であるということにほかならない．

つぎに，**A，B がともに連結集合で $A \cap B \neq \theta$ ならば $A \cup B$ は**

連結集合である.

［証 明］ $A\cup B=(A\cup B)\cap(F_1\cup F_2)$, $(A\cup B)\cap F_1\cap F_2=\theta$ であるときは, $(A\cup B)\cap F_1=\theta$ か, $(A\cup B)\cap F_2=\theta$ かであることを示す.

$$A=A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B)\cap(F_1\cup F_2)=A\cap(F_1\cup F_2)$$
$$=(A\cap F_1)\cup(A\cap F_2),\ A\cap F_1\cap F_2=(A\cap(A\cup B))\cap F_1\cap F_2$$
$$=A\cap((A\cup B)\cap F_1\cap F_2)=A\cap\theta=\theta.$$

よって, $A\cap F_1=\theta$ か, $A\cap F_2=\theta$ でなければならない. 同様にして, $B\cap F_1=\theta$ か $B\cap F_2=\theta$ であることが示される. ところで, $A\cap B\neq\theta$ であるから, $a\in A\cap B$ なる点 a をとれば, $a\in A\cap F_1$ か $a\in A\cap F_2$ かいずれかであるから, かりに, $a\in A\cap F_1$ とすれば, 当然 $a\in B\cap F_1$ で, $A\cap F_1\neq\theta$, $B\cap F_1\neq\theta$. よって $A\cap F_2=\theta$, $B\cap F_2=\theta$, すなわち, $(A\cup B)\cap F_2=\theta$. また, $a\in A\cap F_2$ とすれば, 同様にして $(A\cup B)\cap F_1=\theta$ であることが示される.

問 1. A_1, A_2, …, A_k がいずれも連結集合で $A_\nu\cap A_{\nu+1}\neq\theta$ $(\nu=1, 2, \cdots, k-1)$ であるときは, $\bigcup_{\nu=1}^{k}A_\nu$ も連結集合であることを証明する.

A のどの 2 点 x, y をとっても, かならず, $x\in B$, $y\in B$, $B\subseteq A$ なる連結集合 B があるときは, A は連結集合である.

［証 明］ $A=(A\cap F_1)\cup(A\cap F_2)$, $A\cap F_1\neq\theta$, $A\cap F_2\neq\theta$ であるとし, $x\in A\cap F_1$, $y\in A\cap F_2$ とする. $x\in B$, $y\in B$, $B\subseteq A$ なる連結集合 B をとれば, $B=B\cap A=(B\cap A\cap F_1)\cup(B\cap A\cap F_2)=(B\cap F_1)\cup(B\cap F_2)$. また, $x\in F_1$, $x\in B$ だから $B\cap F_1\neq\theta$. 同様に $B\cap F_2\neq\theta$. よって, B が連結集合である以上, $B\cap F_1\cap F_2\neq\theta$. しかるに, $B\subseteq A$なのであるから, 当然, $A\cap F_1\cap F_2\neq\theta$. これで A が連結であることがわかった.

いまの定理をつかうと, その前の定理をつぎのように拡張できる:

A_α ($\alpha\in M$) がいずれも連結集合で $\bigcap_{\alpha\in M}A_\alpha\neq\theta$ ならば $\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$ は連結集合である.

［証 明］ $x\in\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$, $y\in\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$ とすれば, x, y はそれぞれいずれかの A_α の点であるから, $x\in A_{\alpha_1}$, $y\in A_{\alpha_2}$ としてみる. $A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}\neq\theta$ である

から，$A_{\alpha_1}\cup A_{\alpha_2}$ は連結集合で，$x\in A_{\alpha_1}\cup A_{\alpha_2}$，$y\in A_{\alpha_1}\cup A_{\alpha_2}$，$A_{\alpha_1}\cup A_{\alpha_2}\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$．よって，前定理により，$\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$ は連結集合である．

例 1. $[\alpha;+\infty)=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}[\alpha;\ \alpha+\nu]$ で，$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}[\alpha;\ \alpha+\nu]\neq\theta$ であるから $[\alpha;+\infty)$ は連結集合である（§1，例3）．$(-\infty;\alpha]$ が連結集合であることも同様にして証明できる．また，$(-\infty;+\infty)=(-\infty;\ \alpha]\cup[\alpha;+\infty)$，$(-\infty;\ \alpha]\cap[\alpha;\ +\infty)=\{\alpha\}\neq 0$ だから $(-\infty;+\infty)$ は連結集合である．

例 2. $(\alpha;\ \beta)=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\left[\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+2};\ \beta-\frac{\beta-\alpha}{\nu+2}\right]$，$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\left[\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+2};\ \beta-\frac{\beta-\alpha}{\nu+2}\right]=\left[\alpha+\frac{\beta-\alpha}{3};\ \beta-\frac{\beta-\alpha}{3}\right]\neq\theta$ だから $(\alpha;\ \beta)$ は連結集合である．

問 2. $(\alpha;+\infty)$，$(-\infty;\ \alpha)$ が連結集合であることを証明する．

§3. 点集合の成分 $x\in A$ のとき，$x\in A'$，$A'\subseteq A$ なるすべての連結集合 A' の結び $A(x)$ を x をふくむ A の**成分**という．$\{x\}$ は連結集合で $\{x\}\subseteq A(x)$ であるから $A(x)=\theta$ であることはない．

いま，$x\in A$，$y\in A$ であるとし，$A(x)\cap A(y)\neq\theta$ であるとしてみる．$z\in A(x)\cap A(y)$ とすれば $A(x)$ は z をふくむ連結集合であるから，$A(x)\subseteq A(z)$．してみれば，また，$x\in A(z)$ で $A(z)$ は連結集合であるから，$A(z)\subseteq A(x)$．よって，けっきょく，$A(x)=A(z)$．同様の理由で，$A(y)=A(z)$．ゆえに，$A(x)=A(y)$．すなわち，**A の成分は一致するか，それでなければ共通点をもたない**．こうして，A は互に共通点をもたない成分の結びとして表わされる，ということになるわけである．

点集合 A の成分は A 閉集合である．とくに閉集合の成分は閉集合である．

［証 明］ B が A の成分ならば，$B=A\cap B^a$ であることを示せばよいわけである．それには，$B\subseteq A\cap B^a$ は明らかであるから，$A\cap B^a\subseteq B$ を示せば十分である：$x\in A\cap B^a$ とすれば，$B\subseteq B\cup\{x\}\subseteq B^a$．よって，前節最初の定理により，$B\cup\{x\}$ は連結集合で，しかも，$B\cap(B\cup\{x\})=B\neq\theta$ であるから $B\cup\{x\}\subseteq B$．よって，$x\in B$．すなわち，$A\cap B^a\subseteq B$．

§4.　連結集合の連続写像　連結集合は連続写像によって連結集合に移される．くわしくいうと：

f が R^n の点集合 A から $R^{n'}$ のなかへの連続写像であるとき，もし A が連結集合ならば $A'=f(A)$ も連結集合である．

［証 明］ F_1', F_2' は $R^{n'}$ における閉集合であるとし，$A'=A'\cap(F_1'\cup F_2')=(A'\cap F_1')\cup(A'\cap F_2')$, $A'\cap F_1'\neq\theta$, $A'\cap F_2'\neq\theta$ であるとすれば，$A=f^{-1}(A')=f^{-1}(A'\cap F_1')\cup f^{-1}(A'\cap F_2')=f^{-1}(F_1')\cup f^{-1}(F_2')$．ここに，$f^{-1}(F_1')$, $f^{-1}(F_2')$ は空でない A 閉集合，A は連結集合であるから，$f^{-1}(F_1')\cap f^{-1}(F_2')\neq\theta$．しかるに，$A'\cap F_1'=f[f^{-1}(F_1')]$, $A'\cap F_2'=f[f^{-1}(F_2')]$ であるから，$A'\cap F_1'\cap F_2'\neq\theta$．

上の定理をいいかえれば，f が A で連続写像で $f(A)$ が連結でないときは，A は連結でない，ということになる．また，逆に，A が連結でないときは $f(A)$ が連結でないような $R^{n'}$ のなかへの連続写像が存在する．それをみるのには，$A=(A\cap F_1)\cup(A\cap F_2)$, $A\cap F_1\neq\theta$, $A\cap F_2\neq\theta$, $A\cap F_1\cap F_2=\theta$ とし，$x\in A\cap F_1$ ならば $f(x)=a'$, $x\in A\cap F_2$ ならば $f(x)=b'$ (a', b' は $R^{n'}$ の相ことなる 2 点) とすれば，f はたしかに連続写像であって，$f(A)=\{a', b'\}$ は連結でない集合である(§1，問 2)．

とくに，$n'=1$ の場合，すなわち，連続函数の場合にはつぎの定理が成立する：

f が R^n の連結集合 A で連続函数であるとする．$a\in A$, $b\in A$ で $f(a)<f(b)$ ならば，$f(a)<\gamma<f(b)$ なるどんな γ をとっても

$$x\in A,\ f(x)=\gamma$$

なるごとき点 x が存在する（中間値の定理）．

［証 明］ V 章 §7 のおわりにのべた定理により，$\{x|x\in A,\ f(x)\leqq\gamma\}$ および $\{x|x\in A,\ f(x)\geqq\gamma\}$ はいずれも A 閉集合である．しかも，$a\in\{x|x\in A,\ f(x)\leqq\gamma\}$, $b\in\{x|x\in A,\ f(x)\geqq\gamma\}$ であるからこの二つの A 閉集合は空ではない．しかるに，A は連結集合で $A=\{x|x\in A,\ f(x)\geqq\gamma\}\cup\{x|x\in A,\ f(x)\leqq\gamma\}$ であるところをみれば，$\{x|x\in A,\ f(x)\geqq\gamma\}\cap\{x|x\in A,\ f(x)

$\leqq \gamma\} \neq \theta$ であることがわかる．これは，$f(x)=\gamma$ なる A の点があるということにほかならない．

注意 定理に示された性質は連続函数のいちじるしい性質ではあるが，またかならずしも連続函数にのみ限った性質ではない．不連続な函数でしかも定理に示された性質を有する著名な例を一つ下にあげる：1より小さい正数 x を10進法であらわし

(1) $x=0.a_1a_2\cdots a_\nu\cdots\cdots$

とする．ここに無限に多くの a_ν が9より小さいことにすれば，区間 $(0;\ 1)$ の各点 x は (1) により一通りそしてただ一通りにあらわされる．いま (1) の奇数位の数字で作った列：

$$a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2\nu+1},\ \cdots\cdots$$

において，i) もし無限に多くの $a_{2\nu+1}$ が1と異なる場合には $f(x)=0$ とし，ii) そうでない場合，すなわちほとんどすべての $a_{2\nu+1}$ が1にひとしい場合には，$\nu \geqq p$ ならば，$a_{2\nu+1}=1$ でかつ $a_{2(p-1)+1} \neq 1$ であるような p をとり，

$$f(x)=0.a_{2p+2}a_{2p+4}\cdots a_{2p+2k}\cdots\cdots$$

とすれば，ここに区間 $(0;1)$ を変域とする函数 f が定義される．f が区間 $(0;\ 1)$ の各点において不連続なこと，また $0\leqq f(x)<1$ であることは明らかである．さていま $0<\alpha<\beta<1$ であるような任意の α，β および1より小さい任意の正数

$$0.b_1b_2\cdots b_\nu\cdots\cdots$$

を与えるとき，$\alpha<\xi<\beta$ でしかも

$$f(\xi)=0.b_1b_2\cdots b_\nu\cdots\cdots$$

であるような ξ が存在する．なぜならば，

$$\alpha=0.a_1a_2\cdots a_\nu\cdots\cdots$$

とすれば，無限に多くの a_ν が9より小であるから，かような a_ν をとり

$$\alpha'=0.a_1a_2\cdots a_{\nu-1}(a_\nu+1)000\cdots\cdots$$

とおくときは明らかに $\alpha\leqq\alpha'$．しかるに $\alpha'-\alpha\leqq\dfrac{1}{10^\nu}$ であるから，ν を十分大きくとれば $\alpha'<\beta$．ゆえに奇数 μ を ν より大きくとって $\beta'=\alpha'+\dfrac{1}{10^\mu}<\beta$ ならしめることができる．すなわち

$$\begin{array}{rl} & \text{第}\ \mu\ \text{位} \\ \alpha'=0.a_1a_2\cdots a_{\nu-1}(a_\nu+1)0\cdots00 & |\ 000\cdots\cdots \\ \beta'=0.a_1a_2\cdots a_{\nu-1}(a_\nu+1)0\cdots01 & |\ 000\cdots\cdots \\ \xi=0.a_1a_2\cdots a_{\nu-1}(a_\nu+1)0\cdots00 & |\ 01b_11b_21b_3\cdots\cdots \end{array}$$

よって

とすれば，明らかに $\alpha'<\xi<\beta'$ でしかも

$$f(\xi)=0.b_1b_2b_3\cdots$$

である．

§5. 連続曲線 連続写像のうち，とくに，R^1 における閉区間 $[0;1]$ から R^n のなかへの連続写像 f を考える．$[0;1]$ は有界な連結閉集合であるから，$f([0;1])$ も有界な連結閉集合である．$f([0;1])$ を R^n における**連続曲線**と称する．

例 1． $a,\ b$ を R^n の 2 点とするとき，a と b とを結ぶ線分 $\{a+\lambda(b-a)\,|\,0\leqq\lambda\leqq 1\}$ は $[0;1]$ の点 λ に R^n の点 $a+\lambda(b-a)$ を対応させる $[0;1]$ から R^n のなかへの連続写像による像と考えられる（V. §5，例）．よって，a と b とを結ぶ線分は連続曲線である．

例 2． $[0;1]$ の点 λ に R^2 の点 $(\cos 2\pi\lambda,\ \sin 2\pi\lambda)$ を対応させる写像 f は $[0;1]$ で連続であるから，$f([0;1])$ は曲線である．これは原点を中心とし，半径が 1 にひとしい円，いわゆる単位円にほかならない．

例 1 においては $[0;1]$ から $f([0;1])$ の上への写像は 1 対 1 であり，したがって $[0;1]$ と $f([0;1])$ とは同相である（V. §4）．一般に，$[0;1]$ と同相な連続曲線を **Jordan（ジョルダン）開曲線**と称する．

例 2 の単位円においては，$[0;1]$ から $f([0;1])$ への写像は 1 対 1 ではないが，$[0;1)$ から $f([0;1))$ への写像は 1 対 1 で，ただ $f(1)=f(0)$ であるところが例 1 の場合とちがっているだけである．一般に，このような写像で定められる連続曲線は **Jordan 閉曲線**とよばれる．Jordan 閉曲線とは，いいかえれば，自分自身に交わらない閉じた曲線であるということになる．円，楕円，3 角形の周などそのかんたんな例である．

Jordan 開曲線と Jordan 閉曲線とを総称して **Jordan 曲線**という．

R^2 における Jordan 閉曲線は平面を二つの連結開集合に分かち，曲線はそれらの開集合の境界となっていることが知られている（**Jordan の曲線定理**．この証明は複雑なので省略する．）

注 意 $[0;1]$ の各点に R^n の定点 a を対応させる写像を f とすれば f は連続写像である．したがって，$f([0;1])$ は R^n における連続曲線であるが，これは，じつは，$\{a\}$ にほかならず，ただ 1 点から成る集合である．常識的に曲線と考えられているものの範囲にはいらないが，このようなものも，定義によって，連続曲線とよぶことになっている．この例とは反対の意味で常識的でない曲線の例については §7 を見られたい．

§6. 連続体と領域 2点以上から成る連結閉集合を**連続体**という.

例 1. §1例3, §2例1により, R^1 における閉集合 $[\alpha;\beta]$, $[\alpha;+\infty)$, $(-\infty;\alpha]$, $(-\infty;+\infty)$ はすべて連結集合であるから, これらはいずれも連続体である.

例 2. §5例1により, R^n における点 a, b を結ぶ線分は連結閉集合であるから, 連続体である. また, $x(1)$, $x(2)$, $\cdots$, $x(k)$ が R^n の任意の有限個の点であるとき, $x(1)$ と $x(2)$ を結ぶ線分, $x(2)$ と $x(3)$ を結ぶ線分, $\cdots$, $x(k-1)$ と $x(k)$ を結ぶ線分の和集合は§2問1により連結集合で, しかも閉集合であるから連続体である. これを $x(1)$ と $x(k)$ を結ぶ折れ線と称する.

例 3. R^n の閉区間 $[a;b]$ の任意の2点 x, y を結ぶ線分は $[a;b]$ の部分集合である (II. §2, 問1). ゆえに $[a;b]$ は連続体である (§2の第2の定理).

例 4. $(V(a;\rho))^a=\{x\,|\,\mathrm{dist}(a,x)\leqq\rho\}$ の任意の2点 x, y を結ぶ線分上の点は $x+\lambda(y-x)$ $(0\leqq\lambda\leqq1)$ であらわされる. しかるに, II章§3問1, 問2により
$\mathrm{dist}(a,\ x+\lambda(y-x))=\mathrm{dist}(0,\ x+\lambda(y-x)-a)=\mathrm{dist}(0,(1-\lambda)(x-a)+\lambda(y-a))$
$=\mathrm{dist}(-(1-\lambda)(x-a),\ \lambda(y-a))\leqq\mathrm{dist}(-(1-\lambda)(x-a),\ 0)+\mathrm{dist}(0,\ \lambda(y-a))$
$=(1-\lambda)\,\mathrm{dist}(0,\ x-a)+\lambda\,\mathrm{dist}(0,\ y-a)=(1-\lambda)\,\mathrm{dist}(a,\ x)+\lambda\,\mathrm{dist}(a,\ y)$
$\leqq(1-\lambda)\rho+\lambda\rho\leqq\rho$. よって, x, y を結ぶ線分は $(V(a;\rho))^a$ の部分集合であるから $(V(a;\rho))^a$ は連続体である.

§3によれば, 閉集合の成分はいずれも閉集合である. ゆえに, **閉集合の成分は連続体か, ただ1点から成る集合である**ということになる.

問 1. 連続体は完全集合であることを証明する.

問 2. 有界な連続体の連続写像による像は1点から成るか, あるいは有界な連続体であることを証明する.

連結開集合は**領域**とよばれる.

例 5. §2例1, 例2, 問2により $(\alpha;\beta)$, $(\alpha;+\infty)$, $(-\infty;\alpha)$, $(-\infty;+\infty)$ は R^1 における領域である.

問 3. $(a;b)$, $V(a;\rho)$ はいずれも領域であることを証明する.

開集合の成分は領域である.

[証 明] G は開集合, A は G の成分であるとする. A が開集合であることを示せばよいわけである. x を A の任意の点とし, $V(x)\subseteq G$ なる x の球近傍 $V(x)$ をとれば, A と $V(x)$ とは x を共有する連結集合であるから, $A\cup V(x)$ は連結集合で $A\cup V(x)\subseteq G$. ゆえに, 成分の定義により, $A\cup V(x)\subseteq A$. よって, $V(x)\subseteq A$. すなわち, x は A の内点である. これ

は A が開集合であることを意味する．

折れ線は連結集合であるから(例 2)，開集合の任意の 2 点が，いつでも，その開集合の点ばかりから成る折れ線で結びうるならば，その開集合は領域である．逆に，G が領域ならば，その任意の 2 点 a, b をあたえたとき，その 2 点を結び G の点ばかりから成る折れ線（かんたんにこれを‘G 内の折れ線’という）があることを示そう：a と G 内の折れ線で結びうる G の点および a から成る集合を A とし，$B=G-A$ とおけば，もとより，$G=A\cup B$, $A\cap B=\theta$．x を A の任意の点とし，$V(x;\ \rho)\subseteq G$ なる x の球近傍 $V(x;\ \rho)$ をとれば，$V(x;\ \rho)$ の任意の点 y は x と $V(x;\ \rho)$ 内の線分で結ぶことができる．x 自身が a と G 内の折れ線で結びうるのだから，これは y が a と G 内の折れ線で結ばれること，したがって，$y\in A$，すなわち $V(x;\ \rho)\subseteq A$ を意味する．いいかえれば A は開集合である．また，x を B の点とし，$V(x;\ \rho)\subseteq G$ なる x の球近傍 $V(x;\ \rho)$ をとれば $V(x;\ \rho)\subseteq B$ でなければならない．なぜならば，もし，$y\in A\cap V(x;\ \rho)$ なる点 y があるとすると，y は a と G 内の折れ線で結ばれ，また G 内の線分で x と結ばれるから，x 自身 a と G 内の折れ線で結ばれることになって，$x\in B$ ではなくなってしまうからである．これで，B もまた開集合であることがわかった．ところが，G は連結開集合であり，しかも，$a\in A$ だから $A\neq\theta$．よって，$B=\theta$．すなわち，$G=A$．これは G のどの点も G 内の折れ線で a と結びうることを意味する．与えられた G の点 b が a と G 内の折れ線で結びうることはいうまでもない．

最後に，R^1 における連続体は例 1 の $[\alpha;\ \beta]$, $[\alpha;+\infty)$, $(-\infty;\ \alpha]$, $(-\infty;+\infty)$ の 4 種類にかぎること，また，R^1 における領域は例 5 の$(\alpha;\ \beta)$, $(\alpha;+\infty)$, $(-\infty;\ \alpha)$, $(-\infty;+\infty)$ の 4 種類にかぎることを証明しておこう：A が R^1 における連続体もしくは領域であるとき，$\inf A<\gamma<\sup A$ なる任意の数 γ をとれば，かならず，$\gamma\in A$ であることを示せばよいわけである．$\alpha\in A$, $\beta\in A$, $\inf A<\alpha<\gamma<\beta<\sup A$ とすれば，$\alpha\in(-\infty;\ \gamma]$, $\beta\in(\gamma;+\infty)=(-\infty;\ \gamma]^c$ であるから，$A\cap(-\infty;\ \gamma]\neq\theta$, $A\cap(-\infty;\ \gamma]^c\neq\theta$．したがって，連結集合 A は $(-\infty;\ \gamma]$ の境界点をふくんでい

なければならない(§1). しかるに, $(-\infty;\ \gamma]$ の境界点は明らかに点 γ だけである. すなわち, $\gamma \in A$.

§7. 次元の問題 §5でのべたように, $[0;\ 1]$ は R^1 における連続体, また, $[(0,\ 0);\ (1,\ 1)]$ は R^2 における連続体である. しかも, この二つの連続体の間には1対1の対応があり, その濃度はともに $\aleph$ にひとしい. このことは, つぎのようにして知られる: まず, I章§10例2により, $(0;\ 1] \sim ((0,\ 0);(1,\ 1)]$. つぎに, $\{(0,\ 0)\} \sim \{0\}$, $\{(x_1,\ 0) \mid 0 < x_1 \leqq 1\} \sim (1;2]$, $\{(0,\ x_2) \mid 0 < x_2 \leqq 1\} \sim (2;\ 3]$. しかるに, $[(0,\ 0);(1,\ 1)] = ((0,\ 0);(1,\ 1)] \cup \{(0,0)\} \cup \{(x_1,0) \mid 0 < x_1 \leqq 1\} \cup \{(0,x_2) \mid 0 < x_2 \leqq 1\}$ であるから, $[(0,0);(1,\ 1)] \sim [0;\ 1] \cup (1;\ 2] \cup (2;\ 3] = [0;\ 3]$. ここに, $[0;\ 3] \sim [0;\ 1]$ であるから*, これで, けっきょく, $[0;\ 1]$ と $[(0,\ 0);(1,\ 1)]$ との対等であることが示されたわけである.

このようにして, R^1 の閉区間 $[0;\ 1]$ から R_2 の閉正方形 $K = [(0,\ 0);(1,\ 1)]$ の上への1対1の写像が存在することが明らかになったが, それならば一歩をすすめて, $[0;\ 1]$ から K の上への1対1の連続写像があるであろうか. この問題に対する答は否であることは, つぎのようにして示される.

かりに, $[0;\ 1]$ から K の上への1対1に連続写像があるとし, これを f とする. $[0;1]$ は R^1 における有界閉集合であるから, 逆写像 f^{-1} は K で連続な写像であること, つまり, f は位相写像であることに注意する(V. §4).

いま, $0 \leqq \tau \leqq 1$ とし, R^2 において点 $(0,\ \tau)$ と点 $(1,\ \tau)$ とをむすぶ線分を $L(\tau)$ であらわせば, $L(\tau)$ は R^2 における連続体であるから, その連続写像 f^{-1} による像 $f^{-1}(L(\tau))$ はやはり有界な連続体(§5, 問1), したがって, 閉区間である: $f^{-1}(L(\tau)) = [\alpha(\tau);\ \beta(\tau)]$. $\tau_1 \neq \tau_2$ ならば $[\alpha(\tau_1);\ \beta(\tau_1)] \cap [\alpha(\tau_2);\ \beta(\tau_2)] = \theta$ であることはいうまでもない. いま, $[\alpha(\tau);\ \beta(\tau)]$ にふくまれる有理数の一つを $\rho(\tau)$ とすれば, $\{[\alpha(\tau);\ \beta(\tau)] \mid 0 \leqq \tau \leqq 1\} \sim \{\rho(\tau) \mid$

* $\xi \in [0;\ 1]$ なる ξ に 3ξ を対応させる写像は $[0;\ 1]$ と $[0;\ 3]$ の間の1対1写像を与える.

$0 \leqq \tau \leqq 1\}$. しかるに, $\{\rho(\tau) | 0 \leqq \tau \leqq 1\}$ はすべての有理数の集合の部分集合であるから, 可付番集合である. 一方, $\{[\alpha(\tau);\ \beta(\tau)] \,|\, 0 \leqq \tau \leqq 1\}$ の濃度は $\aleph$ であって可付番ではない. こういう矛盾が生じた上は $[0;1]$ から K の上への 1 対 1 の連続写像は存在しえないことは明らかであろう.

いま証明したことは, 要するに R^1 の閉区間 $[0;\ 1]$ と R^2 の閉正方形 $[(0,\ 0);\ (1,\ 1)]$ とは同相ではありえないということにほかならない. 一般に, **$n < n'$ のとき, $R^{n'}$ において内点をもつ点集合は R^n のどの点集合とも同相になりえないことが知られている**. この証明は本書の程度を越えるので省略するが, こういうところに点集合の次元の相違があらわれていることに注意すべきである.

§8. Peano 曲線

前節でのべたことは, いいかえると, 2 次元空間 R^2 の閉正方形 K をうずめてしまうような Jordan 曲線はない. ということである. しかしながら, Jordan 曲線という限定をとりはらって, 一般の連続曲線ということになれば, K をうずめるような連続曲線があることはあるのである. ただし, そういう曲線は自分自身に交わる曲線であることはいうまでもない.

そういう曲線はその実例をはじめて考案した Peano (ペアノ) の名をとって, **Peano 曲線**とよばれている. ここでは, その後, Lebesgue の考え出した実例について説明することにする.

最初に Cantor の 3 進集合 C から K の上への連続写像をつくる: まず, C の各点

$$(1)\quad \xi = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{3^\nu} + \cdots\cdots, \quad \alpha_\nu = 0 \text{ または } 2 \quad (\nu = 1,\ 2,\ \cdots)$$

において, $\alpha_\nu = 2\beta_\nu$ とおき, (1) をつぎのように書きなおしておく.

$$(2)\quad \xi = 2\left(\frac{\beta_1}{3} + \frac{\beta_2}{3^2} + \cdots + \frac{\beta_\nu}{3^\nu} + \cdots\cdots\right), \quad \beta_\nu = 0 \text{ または } 1 \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

そうした上で, C の各点 ξ に

$$(3)\quad f_1(\xi) \equiv \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_3}{2^2} + \cdots + \frac{\beta_{2\nu-1}}{2^\nu} + \cdots\cdots,$$

$$f_2(\xi) \equiv \frac{\beta_2}{2} + \frac{\beta_4}{2^2} + \cdots + \frac{\beta_{2\nu}}{2^\nu} + \cdots\cdots$$

なる点 $(f_1(\xi),\ f_2(\xi))$ を対応させれば, ここに C から K の上への写像がえられる. 函数 f_1 および f_2 が C で連続なことを示せばこの写像が C で連続なことがわかるわけである (V. §7, 問 1).

いま，ε を任意の正数とし，$\frac{1}{2^\nu}<\varepsilon$ なる自然数 ν を定め，$\delta=\frac{1}{3^{2\nu}}$ とおいて $0<|\xi'-\xi|<\delta$ なる C の点

$$\xi'=2\left(\frac{\beta'_1}{3}+\frac{\beta'_2}{3^2}+\cdots+\frac{\beta'_\nu}{3^\nu}+\cdots\cdots\right)$$

を考える．このとき，

$$\beta_1=\beta'_1,\ \beta_2=\beta'_2,\ \cdots,\ \beta_k=\beta'_k,\ \beta_{k+1}\neq\beta'_{k+1}$$

であるとすると

$$\delta=\frac{1}{3^{2\nu}}>|\xi'-\xi|=2\left|\frac{\beta'_{k+1}-\beta_{k+1}}{3^{k+1}}+\frac{\beta'_{k+2}-\beta_{k+2}}{3^{k+2}}+\cdots\right|\geqq\frac{1}{3^{k+1}}$$

だから，$3^{k+1}>3^{2\nu}$，すなわち，$k>2\nu-1$．でなければならない．よって，

$$|f_1(\xi')-f_1(\xi)|=\left|\frac{\beta'_{2\nu+1}-\beta_{2\nu+1}}{2^{\nu+1}}+\frac{\beta'_{2\nu+3}-\beta_{2\nu+3}}{2^{\nu+2}}+\cdots\right|$$

$$\leqq\frac{1}{2^{\nu+1}}+\frac{1}{2^{\nu+2}}+\cdots=\frac{1}{2^\nu}<\varepsilon.$$

同様にして $|f_2(\xi')-f_2(\xi)|<\varepsilon$．これで f_1 および f_2 が C で連続な函数であることが示された．

こんどは，この写像を $[0;\ 1]$ 全体におしひろげることにし，C の各余区間*$(\alpha;\ \beta)$ の各点 η において

$$(4)\quad f_1(\eta)=\frac{\beta-\eta}{\beta-\alpha}f_1(\alpha)+\frac{\eta-\alpha}{\beta-\alpha}f_1(\beta),$$

$$f_2(\eta)=\frac{\beta-\eta}{\beta-\alpha}f_2(\alpha)+\frac{\eta-\alpha}{\beta-\alpha}f_2(\beta)$$

とおいて，η に点 $(f_1(\eta),\ f_2(\eta))$ を対応させることにする．

$$(5)\quad \begin{cases} f_1(\alpha)\leqq f_1(\eta)\leqq f_1(\beta) \quad \text{または} \quad f_1(\alpha)\geqq f_1(\eta)\geqq f_1(\beta), \\ f_2(\alpha)\leqq f_2(\eta)\leqq f_2(\beta) \quad \text{または} \quad f_2(\alpha)\geqq f_2(\eta)\geqq f_2(\beta) \end{cases}$$

であるから，$(f_1(\eta),\ f_2(\eta))\in K$ であることに注意する．

C の点 ξ には (3) により点 $(f_1(\xi),\ f_2(\xi))$ を，C の余区間 $(\alpha;\ \beta)$ の点 η には (4) により点 $(f_1(\eta),\ f_2(\eta))$ を対応させる写像を f であらわせば，f が $[0;\ 1]$ から K の上への写像であることはたしかである．また，C の余区間の点 η において f が連続であることは (4) から，ただちに，うかがうことができる．C の点 ξ については，ξ が (2) であらわされるものとして，ε が任意の正数であるとき，さきにのべたようにして正数 δ を定め，まず，開区間 $(\xi-\delta;\ \xi)$ を考える．このなかに C の点がなければ，ξ は点 0 であるか，あるいは C の余区間の一つ $(\alpha;\ \beta)$ の右端 β と一致し，$(\xi-\delta;\ \xi)\subseteq(\alpha;\ \beta)$ である．前の $\xi=0$ のときは問題外とする．あとの場合には，(4) からみられるとおり，$\delta'(0<\delta'\leqq\delta)$ を十分小さくとれば，$\xi-\delta'<\eta<\xi$ なる η に対しては不等式

* I 章 §11 参照．

$|f_1(\eta)-f_1(\xi)|<\varepsilon$, $|f_2(\eta)-f_2(\xi)|<\varepsilon$ が成立する.

つぎに, $(\xi-\delta\,;\,\xi)$ のなかに C の点 ξ' があるときには, さきに示したように, $|f_1(\xi')-f_1(\xi)|<\varepsilon$, $|f_2(\xi')-f_2(\xi)|<\varepsilon$. このとき, $(\xi-\delta\,;\,\xi)$ のなかにある C の余区間の一つの右端を β とし, $\xi-\beta=\delta'$ とおけば, $(\xi-\delta';\,\xi)$ のなかにある $[0;\,1]-C$ の点 η における f_1, f_2 の値は, (5) により, そのぞくする余区間の端点 (これは C の点である) におけるそれぞれの値の中間にあるのだから, やはり, $|f_1(\eta)-f_1(\xi)|<\varepsilon$, $|f_2(\eta)-f_2(\xi)|<\varepsilon$. いずれにしても, 正数 δ' を十分小さくとれば, $\xi-\delta'<\zeta\leqq\xi$ なる $[0;\,1]$ の点 ζ においては

(6)　$|f_1(\zeta)-f_1(\xi)|<\varepsilon$, $|f_2(\zeta)-f_2(\xi)|<\varepsilon$.

同様にして, 正数 δ'' を十分小さくとれば, $\xi\leqq\zeta<\xi+\delta''$ なる $[0;\,1]$ の点 ζ に対しては (6) の不等式が成立する. したがって, $\delta_0=\min(\delta',\,\delta'')$ とおけば,

$|\zeta-\xi|<\delta$ なる ζ に対しては $|f_1(\zeta)-f_1(\xi)|<\varepsilon$, $|f_2(\zeta)-f_2(\xi)|<\varepsilon$.

これで, ξ において f が連続であることも明らかになった.

VII. 開集合・閉集合の構造

§1. $\boldsymbol{R}^1$ における開集合と閉集合 開集合の成分は領域である(VI. §5). しかるに, R^1 の領域は $(\alpha;\ \beta), (\alpha;+\infty), (-\infty;\ \alpha), (-\infty;+\infty)$ の形の集合ばかりである(VI. §5). ここで改めて, これらの集合をひろく開区間とよぶことにすれば, R^1 においては開集合の成分は開区間であるということになる. いま, 一つの開集合の成分である開区間のおのおのにおいて, そのなかにふくまれる有理数を一つずつとって, これらの有理数の集合をつくってみる. これは有理数全部の集合 Q の部分集合であるから, 可付番集合である. しかるに, この集合と与えられた開集合の成分である開区間の集合との間には 1 対 1 の対応があるから, けっきょく, R^1 における開集合はたがいに交わらない開区間の可付番集合の結びであるということになる.

問 この定理における開区間の結びとしての表わしかたは一通りにきまることをたしかめる.

閉集合は開集合の余集合である. よって, 上にえられた結果をみると, R^1 における閉集合は R^1 からたがいに交わらない開区間の可付番集合をとりのぞいたものであるということになる. 閉集合の余集合をかたちづくるこれらの開区間をその閉集合の**余区間**と称する.

閉集合 F の二つの余区間が共通の端点をもっているときは, この端点は F にぞくし, しかも F の孤立点である. 逆に, F の孤立点が F の二つの余区間に共通の端点であることも明らかである. よって, **$\boldsymbol{R}^1$ における閉集合が完全集合であるための必要十分条件はその余区間が共通の端点を有しないことである.**

Cantor の 3 進集合(I. §11)はいまのべた定理の実例の一つである. なお, Cantor の 3 進集合が疎な集合であることと関連して, もう一つ, つぎの定理がある: **$\boldsymbol{R}^1$ における閉集合 $\boldsymbol{F}$ が疎であるための必要十分条件は**

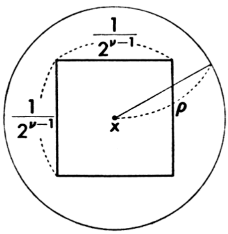
F がその余区間の端点の集合の閉包であることである.

[証 明] i) F の余区間の端点の集合を A とし，$F=A^a$ であるとする. $A\subseteq F^{ca}$ だから，$F=A^a\subseteq F^{ca}$. また，もとより，$F^c\subseteq F^{ca}$. よって，$R^1=F\cup F^c\subseteq F^{ca}$. これは F が疎であるということにほかならない.

ii) 逆に，F が疎であるとする: $R^1=F^{ca}$. $x\in F$ とし $V(x)$ を x の任意の近傍とし，$x\in V_1(x)\subseteq V(x)$ なる開区間 (球近傍) $V_1(x)$ をとれば $V_1(x)\cap F^c$ は空でない開集合である. このとき，もし，$V_1(x)\cap A=\theta$ ならば $V_1(x)$ は F の余区間の一つの部分集合となり，$V_1(x)\subseteq F^c$. これは $x\in F$ という仮設にそむくから，$V_1(x)\cap A\neq\theta$. よって，$V(x)\cap A\neq\theta$，すなわち，$x\in A^a$，したがって，$F\subseteq A^a$，しかるに，もとより，$A\subseteq F$，したがって，$A^a\subseteq F$ なのだから，けっきょく，$F=A^a$.

最後に，**R^1 における開集合は内点を共有しない閉区間の可付番集合の結びとして表わしうる**ことをつけ加えておこう. これは，次節で証明する定理で $n=1$ とした場合にあたるから，ここでは別に証明しない.

§2. 開集合の構造 前節のはじめにのべた定理にあたるものは R^n ではそのままでは成り立たない. しかし，これにかわるものとして，n のいかんにかかわらず R^n で成り立つつぎの定理がある: **R^n における開集合 G は内点を共有しない閉区間の可付番集合の結びとして表わされる.**



VII-1 図

[証 明] IV 章 §4 で説明した網目をつかって証明する. x を G の任意の点とすれば x は G の内点であるから，$V(x;\ \rho)\subseteq G$ なる x の球近傍 $V(x;\ \rho)$ があるはずである. ところが，第 ν 次の網 $\mathfrak{N}_\nu^n$ にぞくする網目の直径は $\frac{\sqrt{n}}{2^{\nu-1}}$ であるから，$\frac{\sqrt{n}}{2^{\nu-1}}<\rho$ であるような ν に対しては，x をふくむ第 ν 次の網目は $V(x;\ \rho)$ の部分集合でなければならない. すなわち，G のどの点 x をとっても，ν を十分大きくとれば，x をふくみしかも G にふく

まれる第 ν 次の網目があることがわかる.

そこで，まず，$\mathfrak{R}_1{}^n$ の網目のうち G の部分集合であるものを

$$Q_{11},\ Q_{12},\ \cdots,\ Q_{1p},\ \cdots\cdots$$

とし，つぎに，$\mathfrak{R}_2{}^n$ の網目のうち，$G-\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{1p}^i$ の部分集合であるものを

$$Q_{21},\ Q_{22},\ \cdots,\ Q_{2p},\ \cdots\cdots$$

であらわす．また，$\mathfrak{R}_3{}^n$ の網目のうち，$G-[(\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{1p}^i)\cup(\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{2p}^i)]$ の部分集合であるものを

$$Q_{31},\ Q_{32},\ \cdots,\ Q_{3p},\ \cdots\cdots$$

であらわし，…，順次に，$\mathfrak{R}_\nu{}^n$の網目のうち

$$G-[(\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{1p}^i)\cup(\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{2p}^i)\cup\cdots\cup(\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{\nu-1,\,p}^i)]$$

の部分集合であるものを

$$Q_{\nu1},\ Q_{\nu2},\ \cdots,\ Q_{\nu p},\ \cdots\cdots$$

であらわす，というように，この手続きをかぎりなくくりかえして行くときは，

$$G=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(\bigcup_{p=1}^{\infty}Q_{\nu p}).$$

であることは，上にのべたところから，明らかであろう．この右辺にあらわれる閉区間

$$Q_{\nu p}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ p=1,\ 2,\ \cdots)$$

は，じつは，閉区間の可付番集合にほかならないから（I. §9，… 22ページ），これで定理の証明はおわったわけである.

注意　この定理における閉区間の和としての表わしかたは一通りにはさだまらない．このことは一つの閉区間がいくつもの内点を共有しない閉区間の結びとして表わされることから明らかである.

閉区間は閉集合である．よって，いま証明した定理は開集合が閉集合の可付番集合の結びとして表わされることを示している．これを裏がえしていえば，（有限個の閉集合の結びは閉集合であるが）無限に多くの閉集合の結びは閉集合であるとはかぎらない，ということになる.

F を閉集合とすれば，F^c は開集合である．よって，$F^c=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}F_\nu$ (F_ν は閉集合)．この等式の両辺の余集合をとれば，$F=\bigcap_{\nu=1}^{\infty}F_\nu{}^c$. $F_\nu{}^c$ は開集合であるから，これで，**閉集合は開集合の可付番集合の交わりとして**

表わされることがわかった．同時に，このことはまた，無限に多くの開集合の交わりは，一般には，開集合ではないことを物語っている．

いまのべた閉集合についての定理は，また，つぎのようにしても証明できる：ρ を正数とし，$G(\rho)=\{x \mid \mathrm{dist}(x,\ F)<\rho\}$ とおけば，$F\subseteq G(\rho)$ で $G(\rho)$ は開集合である．このことは，$x\in G(\rho)$, $\mathrm{dist}(x,\ F)=\rho'<\rho$ とすれば $V(x;\ \rho-\rho')\subseteq G(\rho)$ から明らかであろう．いま，$\rho=1,\ \dfrac{1}{2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{\nu},\ \cdots$ として，$G(1),\ G\left(\dfrac{1}{2}\right),\ \cdots,\ G\left(\dfrac{1}{\nu}\right),\ \cdots$ をつくれば，$F\subseteq\bigcap_{\nu=1}^{\infty}G\left(\dfrac{1}{\nu}\right)$．しかるに，$x\in F^c$ とすれば $\mathrm{dist}(x,\ F)>0$ であるから（V. §7，例 3），$\dfrac{1}{\nu}<\mathrm{dist}(x,\ F)$ なる ν に対しては $x\notin G\left(\dfrac{1}{\nu}\right)$．すなわち，$x\notin\bigcap_{\nu=1}^{\infty}G\left(\dfrac{1}{\nu}\right)$．よって，$F=\bigcap_{\nu=1}^{\infty}G\left(\dfrac{1}{\nu}\right)$．

最後に，この節のはじめにのべた定理を修正してつぎのようにすることもできることに注意しておく：**開集合はたがいにまじわらない半開区間の可付番集合の結びとしてあらわされる．** このことは，前記の定理の証明において，閉区間 $Q_{\nu p}$ が，たとえば，$[a;\ b]$ であるときこれを半開区間 $[a;\ b)$ でおきかえてみればすぐわかることであろうと思われる．

問 A が任意の点集合であるとき，$A^a=\bigcap_{\nu=1}^{\infty}G\left(\dfrac{1}{\nu}\right)$ を証明する．ここに $G(\rho)=\{x \mid \mathrm{dist}(x,\ A)<\rho\}$ とする．

§3. 閉集合の分解

III 章 §5 において点集合の集積点についてのべたが，ここでは，さらに，点集合の凝集点なるものを定義する：

点 x のどの近傍 $V(x)$ をとっても，$V(x)\cap A$ が可付番でない点集合であるとき，x は点集合 A の**凝集点**であるという．$V(x)\cap A$ が可付番でなければ，当然，$V(x)\cap(A-\{x\})\neq\theta$ であるから，A の凝集点は A の集積点の特殊な場合にほかならない．したがって，A のすべての凝集点の集合を A^k であらわすことにすれば，$A^k\subseteq A^d$．

例 x は点集合 A の内点であるとし，$V(x)$ を x の任意の近傍とすれば，x は $A^i\cap V(x)$ の内点であるから，$V(x;\ \rho)\subseteq A^i\cap V(x)$ なる x の球近傍 $V(x;\ \rho)$ があるはずである．しかるに，$V(x;\ \rho)$ は可付番でない集合であるから（II. §5，問），$A\cap V(x)$ も可付番ではありえない．すなわち，点集合の内点は凝集点である．

A が可付番集合ならば，もとより，$A^k=\theta$，したがって $A\cap A^k=\theta$ である．

逆に，**$A\cap A^k=\theta$ ならば A が可付番集合である**ことはつぎのようにして証明される：A のどの点も凝集点ではないのであるから，A の各点 x において $A\cap V(x)$ が可付番であるような x の近傍 $V(x)$ があるはずである．各点 x でそういう $V(x)$ を定めたとすれば $A\subseteq\bigcup_{x\in A}V(x)$ であるから，Lindelöf の被覆定理により，A の点 $x(1)$, $x(2)$, $\cdots$, $x(\nu)$, $\cdots$ をえらんで $A\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}V(x(\nu))$ ならしめることができる．よって

$$A=A\cap[\bigcup_{\nu=1}^{\infty}V(x(\nu))]=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}[A\cap V(x(\nu))],$$

ここに，$A\cap V(x(\nu))$ のおのおのは可付番集合，したがって A も可付番集合でなければならない．

いま証明した定理をいいかえるとつぎのごとくなる：**A が可付番でない集合ならば $A\cap A^k\neq\theta$．**

このことから，**$A^k\neq\theta$ ならば A^k は自己稠密な集合である**ことが，ただちに，でてくる．すなわち，$x\in A^k$ とすれば，$V(x)$ が x のどの近傍であっても，$A\cap V(x)$，したがって，$A\cap V(x)-\{x\}$ は可付番でない集合である．よって，上の定理により，$(A\cap V(x)-\{x\})\cap(A\cap V(x)-\{x\})^k\neq\theta$．だから，$y\in(A\cap V(x)-\{x\})\cap(A\cap V(x)-\{x\})^k$ とすれば，$y\in V(x)$, $y\in(A\cap V(x)-\{x\})^k\subseteq A^k$, $y\neq x$．すなわち，x は A^k の集積点である．同様にして，**$A\cap A^k$ が自己稠密である**ことが証明できる．

つぎに，**A^k は閉集合である**ことを証明しよう：$x\in A^{ka}$ とし，$x\in G$ なる任意の開集合 G を考える．G は x の開近傍だから $G\cap A^k\neq\theta$．よって，$y\in G\cap A^k$ とすれば，G は A の凝集点 y の開近傍で，したがって，$G\cap A$ は可付番集合ではない．ところが，x のどの近傍 $V(x)$ をとっても，$x\in G\subseteq V(x)$ なる開集合 G があるのだから，これで $A\cap V(x)$ は可付番でないことになった．すなわち，x も A の凝集点で $x\in A^k$．よって，$A^{ka}\subseteq A^k$，すなわち，$A^{ka}=A^k$．これは A^k が閉集合であるということにほかならない．

以上二つの定理をまとめれば，けっきょく，**$A^k\neq\theta$ ならば A^k は完全**

集合であるということになる.

これだけ結果が出そろうと，ここにつぎの **Cantor-Bendixon (ベンディクソン)** の定理を証明することができる:

閉集合はたがいに交わらない完全集合と可付番集合との結びとしてあらわすことができる.

[証 明]　F を閉集合とし，$A=F-F^k$ とおけば，$F^k\subseteq F^d\subseteq F$ であるから，$F=F^k\cup A$，$F^k\cap A=\theta$ である．ここに，まず，F^k は，さきに証明したように，完全集合である．つぎに，A については，A のどの点をとっても，これは F の凝集点ではありえない．したがって，もとより，A 自身の凝集点でもありえない. すなわち，$A\cap A^k=\theta$ であるから，A は可付番集合である.

注 意　閉集合 F を完全集合と可付番集合とに分解するには，いまの定理でのべた F^k と $F-F^k$ とに分解する以外に分解するしかたがないことが知られている．このことの証明は次節で完全集合の濃度について説明したのちにのべる.

問　$(A\cup B)^k=A^k\cup B^k$ を証明する.

§4.　完全集合の濃度

まず，つぎのような注意から出発する:　x は R^n の任意の点，$V(x)$ は x の任意の近傍であるとする．x は $V(x)$ の内点であるから，$V(x;\rho)\subseteq V(x)$ なる x の球近傍 $V(x;\ \rho)$ があるはずである．いま，$0<\rho'<\rho$ なる正数 ρ' をとれば $V(x;\ \rho')$ はもとより x の球近傍で，$(V(x;\ \rho'))^a=\{y|\operatorname{dist}(x,\ y)\leqq\rho'\}\subset V(x;\ \rho)\subseteq V(x)$．ゆえに，$U(x)=V(x;\ \rho')$ とおけば，けっきょく,

V6)　x のどの近傍 $V(x)$ を与えても，$(U(x))^a\subseteq V(x)$ なる x の近傍 $U(x)$ が存在する,

ということになってくる.

この注意をつかって，つぎの定理を証明する:　**空でない完全集合は可付番でない集合である*.**

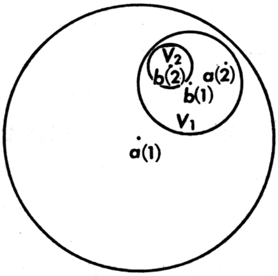
[証 明]　P は空でない完全集合であるとする．P の可付番部分集合

---

*　実をいえば，完全集合の濃度は $\aleph$ であることが知られている.

$$A=\{a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(\nu),\ \cdots\cdots\}$$

をどうえらんでも，かならず，$x\notin A$，$x\in P$ なる点 x があることをいえばこの定理は証明されたことになる．まず，P は自己稠密な集合であるから，$a(1)$ は P の集積点であって，$a(1)$ の近傍には $a(1)$ 以外の P の点があるはずであるから，その一つを $b(1)$ とする．$a(1)\notin V_1$ なる $b(1)$ の有界な開近傍 V_1 をとれば，$b(1)$ も P の集積点であるから，$V_1\cap(P-\{b(1)\})\neq\theta$．よって，$b(2)\in V_1\cap(P-\{b(1)\})$，$b(2)\neq a(2)$ なる $b(2)$ をとれば*，V_1 はまた $b(2)$ の近傍でもあるから，$a(2)\notin V_2$，$V_2{}^a\subseteq V_1$ なる $b(2)$ の開近傍 V_2 があるはずである．この V_2 について，V_1 についてと同様のことをおこない，$b(3)\in V_2\cap(P-\{b(2)\})$，$b(3)\neq a(3)$ なる点 $b(3)$ をとって，$a(3)\notin V_3$，$V_3{}^a\subseteq V_2$ なる $b(3)$ の開近傍 V_3 をえらぶ．また，この V_3 について V_2 についてと同様のことをおこない V_4 をつくる．……



VII-2 図

以上のような手続きをかぎりなくつづけると，ここに開集合の列

$$V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_\nu,\ \cdots\cdots$$

がえられ，

$$a(\nu)\notin V_\nu,\quad V_\nu\cap P\neq\theta,\quad V_{\nu+1}^a\subseteq V_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \cdots)$$

であるということになる．いま，$F_\nu=V_\nu{}^a\cap P$ とおけば，F_ν は空でない有界な閉集合で，しかも

$$F_{\nu+1}=V_{\nu+1}^a\cap P\subseteq V_\nu\cap P\subseteq V_\nu{}^a\cap P=F_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \cdots)$$

であるから，Cantor の定理 (IV. §3) により，$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}F_\nu\neq\theta$．よって，$x\in\bigcap_{\nu=1}^{\infty}F_\nu$ とすれば，もとより，$x\in P$．しかるに，どの自然数 ν をとっても，$x\in F_{\nu+1}\subseteq V_{\nu+1}^a\subseteq V_\nu$，$a(\nu)\notin V_\nu$．よって，どの自然数 ν に関しても $x\neq a(\nu)$，すなわち，$x\notin A$．これで A にぞくしない P の点のあることが示されたわけである．

この定理からつぎの定理が導かれる：**P が完全集合ならば $P^k=P$.**

---

* そういう $b(2)$ があることは IV 章§6 問 からわかる．

［証明］ $P^k \subseteq P^d \subseteq P$ であるから，$P \subseteq P^k$ であること，すなわち，$x \in P$ ならば x は P の凝集点であることを証明すればよいわけである．$V(x)$ を x の任意の近傍とし，$(U(x))^a \subseteq V(x)$ なる x の球近傍 $U(x)$ をとれば，$U(x)$ は開集合であるから，$P \cap U(x)$ は自己稠密集合（III. §5, 問 2），よって $(P \cap U(x))^a$ は空でない完全集合（III. §5），したがって可付番でない集合である．しかるに，$(P \cap U(x))^a \subseteq P^a = P$, $(P \cap U(x))^a \subseteq (U(x))^a \subseteq V(x)$, よって，$(P \cap U(x))^a \subseteq P \cap V(x)$. これは，$P \cap V(x)$ は可付番でない集合であること，したがって，x は P の凝集点であることを意味する．

この節でえられた結果をつかうと，前節注意でのべたことはつぎのようにして証明される：F は閉集合であるとし，$F = P \cup (F-P)$ で P は完全集合，$F-P$ は可付番集合であるとする．$F^k = (P \cup (F-P))^k = P^k \cup (F-P)^k$（§3, 問）において，$P^k = P$, また $F-P$ は可付番集合であるから，$(F-P)^k = \theta$. よって，$F^k = P \cup \theta = P$. よって，**閉集合 $\boldsymbol{F}$ が完全集合 $\boldsymbol{P}$ と可付番集合 $\boldsymbol{F-P}$ の結びとして表わされるときは，かならず，$\boldsymbol{P = F^k}$ である**ことがわかったわけである．

§5. Borel 集合

$A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ において F_ν がいずれも閉集合であるとき，A は **$\boldsymbol{F_\sigma}$ 集合**であるという．F を任意の閉集合とし，$F_1 = F$, $F_\nu = \theta$ $(\nu = 2, 3, \cdots)$ とおけば $F = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ であるから，閉集合は F_σ 集合である．また，§2 でのべたように，開集合も F_σ 集合である．しかしながら，F_σ 集合のなかには開集合でも閉集合でもないものがあることに注意しなければならない．たとえば，F_σ 集合

$$[a;\ b) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left[a; \frac{1}{\nu+1}a + \frac{\nu}{\nu+1}b\right]$$

は閉集合でも開集合でもない．

$A = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$ において G_ν がいずれも開集合であるとき，A は **$\boldsymbol{G_\delta}$ 集合**であるという．G を任意の開集合とし，$G_1 = G$, $G_\nu = R^n$ とおけば $G = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$ であるから，開集合は G_δ 集合である．また，§2 でのべたように，閉集合は G_δ 集合である．開集合でも閉集合でもない G_δ 集合の例としては，上の等式から De Morgan の法則によってえられる

$$[a;\ b)^c = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \left[a; \frac{1}{\nu+1}a + \frac{\nu}{\nu+1}b\right]^c$$

をあげることができる.

問 1. F_σ 集合の余集合は G_δ 集合，逆に G_δ 集合の余集合は F_σ 集合であることをたしかめる.

A_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ のおのおのが F_σ 集合であるとき，$\bigcup_{\nu=1}^{\infty}A_\nu$ はやはり F_σ 集合である. このことは $A_\nu=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{\nu k}$ (ただし $F_{\nu k}$ は閉集合) とおけば，$\bigcup_{\nu=1}^{\infty}A_\nu=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{\nu k})$ であることからわかる(I. §9, 20 ページ). しかしながら，$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}A_\nu$ はかならずしも F_σ 集合であるとはかぎらない. $\bigcap_{\nu=1}^{\infty}A_\nu$ の形で表わされる集合は $\boldsymbol{F_{\sigma\delta}}$ **集合**とよばれる. 同様にして，B_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ がいずれも G_δ 集合であるとき $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}B_\nu$ は $\boldsymbol{G_{\delta\sigma}}$ 集合であるといわれる. 以下同様にして，$F_{\sigma\delta\sigma}$ 集合，$F_{\sigma\delta\sigma\delta}$ 集合，…，および $G_{\delta\sigma\delta}$ 集合，$G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ 集合，… が定義される.

問 2. G_δ 集合は $F_{\sigma\delta}$ 集合，F_σ 集合は $G_{\delta\sigma}$ 集合であることをたしかめる.

このようにして，閉集合や開集合から出発して，集合の列の結びや交わりをつくる手続をかぎりなくくりかえして行くときその途上に現われるあらゆる集合を総称して **Borel 集合**という. 閉集合，開集合，F_σ 集合，G_δ 集合，… は，すなわち，Borel 集合の簡単な例であるということになる.

Borel 集合というのは，いちおう，上にのべたような集合を指すのであるが，定義としてみると上ののべかたは，いささか，あいまいであることを免かれない. ‘手続をかぎりなくくりかえして行く’ という言葉の意味はあまりはっきりしないうらみがある. よって，ここに改めて，もうすこし明確な定義を与えることをこころみよう. そのために，まず，‘加法的集合族’ という概念を導入する.

最初に，‘集合族’ ということばの意味を説明しておく. 集合の元がいずれも集合であるとき，‘集合の集合’ といういいかたを避けるために ‘集合族’ ということばを使う. たとえば，X は R^n の点集合をあらわすこととすれば

$$\{X\,|\,X=X^a\}$$

は R^n の閉集合すべてから成る集合族である.

集合族のうち，とくに加法的集合族とよばれるものはつぎのようにして定義される:

ここに一つの集合 E があって，E の部分集合から成る集合族 $\mathfrak{A}$ がつぎの条件 A1)，A2)，A3) を満足するとき，$\mathfrak{A}$ は (E における) **加法的集合族**という.

A1) $E\in\mathfrak{A}$

A2) $X\in\mathfrak{A}$ ならば $E-X\in\mathfrak{A}$

A3) $X_\nu\in\mathfrak{A}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ ならば $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}X_\nu\in\mathfrak{A}$.

加法的集合族 $\mathfrak{A}$ の定義からすぐでてくる簡単な定理をあげておこう.

まず，A1) により $E\in\mathfrak{A}$ だから，A2) により $E-E\in\mathfrak{A}$. すなわち，

A1′) $\theta\in\mathfrak{A}$.

つぎに, $X_\nu \in \mathfrak{A}$ ($\nu=1, 2, \cdots$) ならば, A2) により $E-X_\nu \in \mathfrak{A}$. よって, A3) により $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (E-X_\nu) \in \mathfrak{A}$. したがって, ふたたび A2) により, $E-\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (E-X_\nu) \in \mathfrak{A}$. De Morgan の法則によれば, これは

A3′) $X_\nu \in \mathfrak{A}$ ($\nu=1, 2, \cdots$) のとき $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} X_\nu \in \mathfrak{A}$

であることを意味する.

問 3. A1′), A2), A3′) が成り立てば $\mathfrak{A}$ は加法的集合族であることをたしかめる.

いま, とくに, $E=R^n$ の場合には A2) はつぎのように書くことができる:

A2′) $X \in \mathfrak{A}$ ならば $X^c \in \mathfrak{A}$.

今後 $\mathfrak{A}$ は R^n における加法的集合族であるとして, いま, $\mathfrak{A}$ に A1), A2), A3) のほかにもう一つつぎの条件を追加してみる.

F) X が閉集合ならば $X \in \mathfrak{A}$.

この条件 F) を満足する加法的集合族 $\mathfrak{A}$ が実際存在することは, たとえば, R^n のあらゆる点集合から成る集合族を $\mathfrak{A}$ としてみれば $\mathfrak{A}$ がこれら 4 条件をみたしていることからすぐわかる. そこで, A1), A2′), A3), F) の 4 条件を満足する集合族のうちで最小のものを $\mathfrak{B}$ であらわし, $\mathfrak{B}$ の元である集合を R^n における **Borel 集合**と称する. ここに '最小の集合族' というのは, 4 条件を満足するあらゆる集合族の交わりという意味である. こういう '最小の集合族' $\mathfrak{B}$ が, やはり, A1), A2′), A3), F) の 4 条件をみたしていることは容易にたしかめられる.

さきにあげた Borel 集合の定義は, このようにして, 明確にされた. A2′), F) により開集合が Borel 集合であることは明らかであろう. なお, F_σ 集合, $F_{\sigma\delta}$ 集合, G_δ 集合, … 等がいまのべた意味での Borel 集合であることも, あらためて, たしかめるまでもないであろう.

問 4. R^n における集合族 $\mathfrak{A}$ が A1), A2′), A3) とつぎの G) を満足する最小の集合族ならば $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ であることをたしかめる.

G) G が開集合ならば $G \in \mathfrak{A}$.

VIII. 距離空間と位相空間

§1. 距離空間 II 章§3において R^n の2点 x から点 y への距離 dist(x, y) を

(1) $\mathrm{dist}(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$

によって定義した．このように定義した距離の基本的性質はつぎの3カ条であった:

D1) $\mathrm{dist}(x, y)\geqq 0$. $x=y$ のとき，またそのときにかぎって $\mathrm{dist}(x, y)=0$.

D2) $\mathrm{dist}(x, y)=\mathrm{dist}(y, x)$.

D3) $\mathrm{dist}(x, y)+\mathrm{dist}(y, z)\geqq \mathrm{dist}(x, z)$. (3角不等式)

II 章，III 章でのべられた定理の証明や定義の多くはこの D1)，D2)，D3) (と実数の性質) だけをもとにして行なわれている．R^n の点が $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ であるという事実は特殊な定理の証明の場合のほか使われていない．このことはこれらの章を注意深くよみなおせば，すぐ，うなづかれることである．

以上のことを念頭においた上で，つぎの例を考えてみる．

例 A は R^n における点集合であるとし，A を定義域とする有界な函数 (A から R^1 のなかへの有界な写像) すべてから成る集合を L であらわすこととする．$f\in L$, $g\in L$ ならば，x が A の任意の点であるとき

$|f(x)-g(x)|\leqq|f(x)|+|g(x)|\leqq\sup\{|f(x)|\,|\,x\in A\}+\sup\{|g(x)|\,|\,x\in A\}$

であるから，$f-g$ は有界，したがって，$f-g\in L$ である．よって，いま，

(2) $\mathrm{dist}(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x\in A\}$

とおいて，x, y, z のかわりに f, g, h と書けば，D1)，D2)，D3) が成り立つことは容易に証明することができる．

問 1. いまのべたことを証明する．

こうしてみると，もし，いま，L の元 f, g 等を‘点’とよび，L をそれらの‘点’から成る‘空間’とよぶことにすれば，II 章以下にのべたことは‘空間’L の‘点集合’についても，そのまま，あてはまるはずである．たとえば，L における‘点列’(じつは，函数列)

（3）　$f_1, f_2, \cdots, f_\nu, \cdots\cdots$

において,

（4）　$\lim_\nu \mathrm{dist}(f_\nu, f)=0 \qquad (f \in L)$

であるときは, IV 章 §1 の流儀にしたがって,

（5）　$\lim_\nu f_\nu = f$

と書くことになるわけである.

ただし,（5）は V 章 §6 のはじめに与えておいた定義とはちがうことを意味していることに注意しなければならない.（4）は正数 ε を任意に与えたとき

$$\nu \geqq N \quad \text{ならば} \quad \sup\{|f_\nu(x)-f(x)| \,|\, x \in A\} < \varepsilon$$

なるごとき自然数 N が, いつでも, 存在するという意味である. したがって,（5）は, ここでは, 函数列（3）が A で f に一様収束していることを指している: このように, 函数列の一様収束というやや複雑な概念を‘空間’ L の‘点列の収束’ということばに飜訳できるということは注目に値する.

こういう例がほかにもたくさんあるところから, つぎのような考えかたが生じてくるのは, きわめて, 自然であるというべきであろう.

ここに一つの集合 D があって, D の元を $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$ 等の小文字であらわすとき, D のどの二つの元 x, y をとっても, これらについて‘距離’ $\mathrm{dist}(x, y)$ なる数が与えられ, この距離 $\mathrm{dist}(x, y)$ は D1), D2), D3) を満足するとする. ただし, D1), D2), D3) が満足されさえすれば $\mathrm{dist}(x, y)$ の定義がどんなものであるかは, いっさい, 問題にしない. こういう場合 D を‘距離（のある）空間’と名づけ, その元 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 等を距離空間 D の‘点’とよぶことにする. そうした上で, D1), D2), D3) から距離空間 D の‘点集合’についての定理を導き出すことによって, 距離空間論を建設しようというのである.

距離空間論がいったんでき上がってしまうと, そこで得られた定理は距離空間の特別な場合にあたる R^n や上例の L についてもそのまま成り立つわけである. 次節で示すように, 距離空間の例はいくつもあるが, そういう多くの距離空間に共通な定理は個々の距離空間についていちいち証明をくりかえす必要がなくなり, 手数のはぶけること大なるものがあるということになる.

注意 1.　A が R^n の点集合であるとき, A の任意の 2 点に対して（1）によって $\mathrm{dist}(x, y)$ が定義されている. また, x, y, z を A の点だけにかぎっても, もとより,

D1), D2), D3) はそのまま成立する. よって, A もまた一つの距離空間であるということになる. もっと一般にいって, D' が距離空間 D における点集合であるとき, すなわち, $D'\subseteq D$ であるとき, D' の任意の2点 x, y について D で定義された $\mathrm{dist}(x, y)$ をそのまま適用すれば, D' もまた一つの距離空間である. このような場合, D' を D の**部分空間**と称する. 距離空間についての定理は同じく距離空間であるところのその部分空間においてもそのまま成立するので, いままで R^n の点集合についてのべた定理や定義に相当するものを距離空間の場合に拡大適用する場合, 距離空間自身についての定理や定義の形でのべることが多い.

注意 2. おなじ点集合 D についても $\mathrm{dist}(x, y)$ の定義のしかたによって, ちがった距離空間ができうることに注意する. たとえば, §2 例 2 の $R_p{}^n$ は集合としては R^n と同じものである.

問 2. D′1): '$x=y$ なるとき, またそのときにかぎり $\mathrm{dist}(x, y)=0$'. とすれば, D′1), D2), D3) から D1) が導かれることを証明する.

問 3. D′1) とつぎの D′2) とから D1), D2), D3) が結論できることを証明する:

D′2) $\mathrm{dist}(x, z)+\mathrm{dist}(y, z)\geqq \mathrm{dist}(x, y)$.

§2. 距離空間の例

§1 でのべたように, R^n や §1 例の L は距離空間の特別な場合にあたる. 以下, このほかに, 距離空間の例をいくつかあげておこう.

例 1. $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu{}^2$ が収束するとき, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \cdots\cdots)$ と書き, このような x すべての集合を H であらわす. H を **Hilbert (ヒルベルト) 空間**と名づけ, H の元 x を Hilbert 空間の点と称する. $x\in H$, $y\in H$ のとき, 2点 x, y の距離 $\mathrm{dist}(x, y)$ はつぎの等式で定義される:

$$(1)\quad \mathrm{dist}(x, y)=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(x_\nu-y_\nu)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

この定義が意味をもつためには, この等式の右辺に現われる級数が収束しなければならない. よって, まず, そのことを証明しておこう: Schwarz の不等式 (II. §3) によれば

$$\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu|\cdot|y_\nu|\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu|^2\cdot\sum_{\nu=1}^{k}|y_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu{}^2\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}y_\nu{}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ゆえに, k のいかんにかかわらず, $\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu y_\nu|$ は有界であるから, 正項級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu y_\nu|$ は収束し, したがって, 級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu y_\nu$ は収束する. $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu{}^2$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}y_\nu{}^2$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu y_\nu$ が収束する以上, $\sum_{\nu=1}^{\infty}(x_\nu-y_\nu)^2$ の収束することは

$$\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu-y_\nu)^2=\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu{}^2+y_\nu{}^2-2x_\nu y_\nu)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{k}x_\nu{}^2+\sum_{\nu=1}^{k}y_\nu{}^2-2\sum_{\nu=1}^{k}x_\nu y_\nu$$

から明らかである．（1）で定められた dist(x, y) が D1)，D2)，D3) を満足することも容易にたしかめられる:

問 1. いまのべたことをたしかめる．

例 2. R^n におけると同様に $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を点と名づけ，2 点 x, y の距離 dist(x, y) をつぎの等式によって定める:

$$(2)\quad \mathrm{dist}(x, y)=\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-y_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ここに，p は 1 より小さくない任意の定数とする．かように距離を定めたとき，この距離空間を n 次元擬ユークリッド空間 $R_p{}^n$ とよぶことにする． $R_2{}^n=R^n$ であることはいうまでもない．

（2）で定義された距離が D1)，D2) を満足することは容易にたしかめられる．D3) が成り立つことの証明はつぎのとおりである:

i) $p=1$ のとき: $|x_\nu-z_\nu|\leqq|x_\nu-y_\nu|+|y_\nu-z_\nu|$ $(\nu=1, 2, \cdots, n)$ だから

$$\mathrm{dist}(x, z)=\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-z_\nu|\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-y_\nu|+\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu-z_\nu|$$
$$=\mathrm{dist}(x, y)+\mathrm{dist}(y, z).$$

ii) $p>1$ のとき: 証明すべき不等式は

$$(3)\quad \left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-z_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-y_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu-z_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

である．かんたんのため，$u_\nu=x_\nu-y_\nu$, $v_\nu=y_\nu-z_\nu$ とおけば，この不等式はつぎのように書かれる:

$$(4)\quad \left(\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu+v_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Minkowski の不等式)

これを証明するために，まず，$p'=\dfrac{p}{p-1}$ とおいて

$$(5)\quad \sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{n}|b_\nu|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

(Hölder の不等式)．

の証明からとりかかる．その証明の出発点はつぎの不等式である:

$$(6)\quad \alpha\beta\leqq\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^{p'}}{p'}\qquad(\alpha\geqq0,\ \beta\geqq0)$$

問 2. （6）を証明する．

（6）において $\alpha=|a_\nu|\cdot\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{-\frac{1}{p}}$, $\beta=|b_\nu|\cdot\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}$ とおけば

$$|a_\nu||b_\nu|\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}$$
$$\leqq\frac{1}{p}|a_\nu|^p\cdot\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{-1}+\frac{1}{p'}|b_\nu|^{p'}\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{-1}.$$

よって，$\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}\sum_{\nu=1}^n|a_\nu||b_\nu|$

$$\leqq\frac{1}{p}\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{-1}$$
$$+\frac{1}{p'}\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}.$$

$p'=\dfrac{p}{p-1}$ を想起すれば $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ であるから，けっきょく，

$$\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}\sum_{\nu=1}^n|a_\nu||b_\nu|\leqq1.$$

書きなおして，$\sum_{\nu=1}^n|a_\nu||b_\nu|\leqq\left(\sum_{\nu=1}^n|a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^n|b_\nu|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$.

$\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_\nu\leqq\sum_{\nu=1}^n|a_\nu||b_\nu|$ に注意すれば，これから，ただちに（5）がでてくる.

（5）がえられたので，これから（4）を導くにはつぎのようにする：

明らかに $\left(\sum_{\nu=1}^n|u_\nu+v_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left[\sum_{\nu=1}^n(|u_\nu|+|v_\nu|)^p\right]^{\frac{1}{p}}$ だから，（4）のかわりに

$$\left[\sum_{\nu=1}^n(|u_\nu|+|v_\nu|)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^n|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^n|v_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

を証明すれば十分である．それには

$$\sum_{\nu=1}^n(|u_\nu|+|v_\nu|)^p=\sum_{\nu=1}^n|u_\nu|(|u_\nu|+|v_\nu|)^{p-1}$$
$$+\sum_{\nu=1}^n|v_\nu|(|u_\nu|+|v_\nu|)^{p-1}$$

の右辺の各項に，つぎのようにして，（5）を応用する．（5）において，$a_\nu=|u_\nu|$, $b_\nu=(|u_\nu|+|v_\nu|)^{p-1}$ とおいて

$$\sum_{\nu=1}^n|u_\nu|(|u_\nu|+|v_\nu|)^{p-1}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^n|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^n(|u_\nu|+|v_\nu|)^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

同様に

$$\sum_{\nu=1}^n|v_\nu|(|u_\nu|+|v_\nu|)^{p-1}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^n|v_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^n(|u_\nu|+|v_\nu|)^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

ここで，$(p-1)p'=p$ に注意して，上の不等式を辺々相加えると

$$\sum_{\nu=1}^{n}(|u_\nu|+|v_\nu|)^p \leqq$$
$$\left[\left(\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{\nu=1}^{n}(|u_\nu|+|v_\nu|)^p\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

この両辺を $\left[\sum_{\nu=1}^{n}(|u_\nu|+|v_\nu|)^p\right]^{\frac{1}{p'}}$ で除すれば，すなわち，(4) が得られる.

例 3. $[-1;1]$ で連続なすべての函数から成る集合を C であらわすこととし，$f\in C$, $g\in C$ のとき

$$\mathrm{dist}(f,\ g)=\left[\int_{-1}^{1}|f(t)-g(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p\geqq 1)$$

によって，$\mathrm{dist}(f,\ g)$ を定義してみる． $x,\ y,\ z$ のかわりに $f,\ g,\ h$ とかけば D1)，D2)，D3) はこうして定義した距離についても，そのまま，あてはまる. D1)，D2) の証明は容易である． D3) の証明は，$p=1$ の場合は明らかである． $p>1$ の場合は例 2 にならい，つぎのようにする. $a\in C$, $b\in C$ とし，(6) において

$$\alpha=|a(t)|\cdot\left[\int_{-1}^{1}|a(t)|^p dt\right]^{-\frac{1}{p}},\ \beta=|b(t)|\cdot\left[\int_{-1}^{1}|b(t)|^{p'}dt\right]^{-\frac{1}{p'}}$$

とおいてえられる不等式の両辺を -1 から 1 まで積分すれば，例 2 におけるようにして，

$$\int_{-1}^{1}|a(t)|\cdot|d(t)|dt\leqq\left[\int_{-1}^{1}|a(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_{-1}^{1}|b(t)|^{p'}dt\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

この結果をつかうと，$u\in C$, $v\in C$ のとき，例 2 のときのようにして

$$\left[\int_{-1}^{1}|u(t)+v(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\leqq\left[\int_{-1}^{1}|u(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{-1}^{1}|v(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

ここで，$u=f-g$, $v=g-h$ とおけば D3) がえられる:

$$\left[\int_{-1}^{1}|f(t)-h(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\leqq\left[\int_{-1}^{1}|f(t)-g(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{-1}^{1}|g(t)-h(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

§3. 距離空間の基本的性質 D1)，D2)，D3) だけから導かれる距離空間の定理や定義のうち，おもなものをあげておこう.

まず，距離空間 D の点 a の球近傍 $\{x|\ \mathrm{dist}(x,\ a)<\rho\}$ を定義すれば，これをもちいて，点集合 A の内点，外点，境界点，したがって，内核 A^i，外部 A^e，境界 A^l を定義することができる(II. §6).

内核が定義されれば，開集合は内核と一致する点集合であると定義され，こうして定義された開集合については O1)，O2)，O3) の成り立つことがたしかめられる(III. §1):

O1) 開集合の結びは開集合である.

O2) 有限個の開集合の交わりは開集合である.

O3) D および θ は開集合である.

開集合が定義されると閉集合はただちに定義できる. すなわち, $D-F$ が開集合であるとき, F は閉集合であるということに定めるのである.

つづいて, $x\in D$ のとき, $x\in G$ なる任意の開集合 G を x の開近傍と名づけ, また, x を内点とする任意の点集合を x の近傍とよぶことにし, これを一般に $V(x)$ であらわすことにすると, つぎの V1), V2), V3), V4), V5) の成り立つことはすぐたしかめられる.

V1) $x\in V(x)$ (III. §2)

V2) $V_1(x), V_2(x), \cdots, V_k(x)$ が x の近傍ならば $V_1(x)\cap V_2(x)\cap \cdots\cap V_k(x)$ も x の近傍である. (III. §2)

V3) $V(x)$ が x の近傍であるとき, x の近傍 $V_1(x)$ があって, $V_1(x)$ のどの点 y をとっても, $V(x)$ がその y の近傍になっている:

$$(V_1(x)\subseteq V(x)). \quad \text{(III. §2)}$$

V4) $V(x)\subseteq X$ ならば X も x の近傍である. (III. §2)

V5) $x\neq y$ ならば $V(x)\cap V(y)=\theta$ なるごとき x の近傍 $V(x)$ と y の近傍 $V(y)$ とが存在する. (IV. §6)

V6) x のどの近傍 $V(x)$ をとっても $U^a(x)\subseteq V(x)$ なる x の近傍 $U(x)$ が存在する. (VII. §4)

ここまでくれば, 距離空間論の基礎は固められたというべきで, あとは章を追って R^n についてのべてきたことの跡をたどっていけばよいことになる. たとえば II 章, III 章でのべた定理はそのまま距離空間にあてはまる. ただし, いままでの章でのべた定理のなかには R^n に特有の定理, つまり, R^n の点 x とは $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ であり, また R^n における距離 $\mathrm{dist}(x, y)$ は §1 の (1) で定められるという事実をもととして証明された定理もまじっている. そういう定理は一般の距離空間では, かならずしも, 成立するとはかぎらない. たとえば, II 章 §6 のおわりでのべた境界点存在の定理や III 章 §3 注意 1 などがそれである.

問 1. III 章§4にならい，距離空間 D において閉包，触点を定義し，F が閉集合であるための条件は $F^a=F$ であることを証明する(X^a は X の閉包).

問 2. $x\in A^a$ なるための必要十分条件は $\mathrm{dist}(x, A)=0$ であることを証明する．ただし，$\mathrm{dist}(x, A)=\inf\{\mathrm{dist}(x, y) \mid y\in A\}$.

§4. 完備空間 §3でいったように，II 章，III 章でのべたことは，おおむね，一般の距離空間にもあてはまる．しかし，IV 章になると，重要な定理でそうはいかないものが現われる．その最初のものは基本点列についてのつぎの定理(IV. §1)である：

点列が収束するための必要十分条件はその点列が基本列であることである．

点列の収束とか，基本列の定義とかは IV 章§1における と同じようにして定義できる(IV. §1)．ただ，そういう定義を与えた場合，上の定理が距離空間でいつでも成り立つというわけにいかないのである．このことはつぎの例 1，例 2 で示される：

例 1. すべての有理数の集合 Q を R^1 の部分空間と考える． $a(\nu)=1+\dfrac{1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{\nu!}$ とおけば $a(1), a(2), \cdots, a(\nu), \cdots$ は基本列であるが，この点列は Q では収束しない． $\lim\limits_{\nu} a(\nu)=e$ ではあるが e は無理数であって Q にはぞくしないのである．

例 2. 前節の例3で $p=1$ の場合を考える．すなわち，C は $[-1; 1]$ で連続な函数すべてから成る集合とし，$f\in C$, $g\in C$ のとき

$$\mathrm{dist}(f, g)=\int_{-1}^{1}|f(t)-g(t)|\,dt$$

と定める．いま，

$$f_\nu(t)=\frac{\nu t}{1+\nu|t|} \qquad (\nu=1, 2, \cdots)$$

とおけば，明らかに，$f_\nu\in C$ である．以下，まず，距離空間 C の点列（じつは函数列）

(1) $f_1, f_2, \cdots, f_\nu, \cdots\cdots$

が基本列であることを示そう： $\nu_1<\nu_2$ とすれば

$$\mathrm{dist}(f_{\nu_1}, f_{\nu_2})=\int_{-1}^{1}\left|\frac{\nu_1 t}{1+\nu_1|t|}-\frac{\nu_2 t}{1+\nu_2|t|}\right|dt=2\int_0^1\left[\frac{\nu_2 t}{1+\nu_2 t}-\frac{\nu_1 t}{1+\nu_1 t}\right]dt$$

$$=2\int_0^1\left[\frac{1}{1+\nu_1 t}-\frac{1}{1+\nu_2 t}\right]dt<2\int_0^1\frac{1}{1+\nu_1 t}dt=\frac{2\log(1+\nu_1)}{\nu_1}.$$

よって，任意の正数 ε に対し

$$\nu \geqq \nu_0 \quad ならば \quad \frac{\log(1+\nu)}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2}$$

なるごとき自然数 ν_0 をえらんでおけば

$$\nu_2 > \nu_1 \geqq \nu_0 \quad ならば \quad \mathrm{dist}(f_{\nu_1}, f_{\nu_2}) < \varepsilon.$$

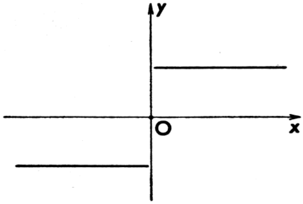
これは点列（1）が基本列であるということにほかならない．

こんどは，$f \in C$ で

$$(2) \quad \lim_{\nu} \mathrm{dist}(f_\nu, f) = 0$$

となるような函数 f が存在しないことをたしかめる．そのためには，あらかじめ，つぎのようにして，不連続函数 g を定義してかかるのが便利である：

$$-1 \leqq t < 0 \quad ならば \quad g(t) = -1$$
$$g(0) = 0$$
$$0 < t \leqq 1 \quad ならば \quad g(t) = 1.$$



VIII-1 図

このような g については

$$\int_{-1}^{1} |f_\nu(t) - g(t)|\, dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{\nu t}{1+\nu t}\right) dt$$
$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+\nu t} dt = \frac{2\log(1+\nu)}{\nu}.$$

いま，（2）をみたすような C の点 f があったものとしてみる．

$$\int_{-1}^{1} |g(t)-f(t)|\, dt \leqq \int_{-1}^{1} |g(t)-f_\nu(t)|\, dt + \int_{-1}^{1} |f_\nu(t) - f(t)|\, dt$$
$$= \frac{2\log(1+\nu)}{\nu} + \mathrm{dist}(f_\nu, f)$$

であるから，$\nu \to +\infty$ ならしめてみれば，

$$\int_{-1}^{1} |g(t)-f(t)|\, dt = 0$$

であることになる．これが成り立つためには g が連続であるような t の値に対しては $g(t) = f(t)$ でなければならない．よって，$-1 \leqq t < 0$ ならば $f(t) = -1$，$0 < t \leqq 1$ ならば $f(t) = 1$ となり，f は $t = 0$ で連続ではありえないという不合理が生ずる．これで，この例でとった距離空間では上の定理が成り立たないことがわかったわけである．

以上のような事情があるので，基本列の定理が成り立つような距離空間をとくに**完備空間**とよぶことになっている．たとえば，ユークリッド空間 R^n は完備空間である．

問 1. §1 例の距離空間 L は完備空間であることをたしかめる．

問 2. 完備空間の部分空間が閉集合ならば，この部分空間も完備空間であることを証明する．

§5.　距離空間における被覆定理　距離空間 D においても，$A \subseteq D$ のとき，

$$\sup\{\mathrm{dist}(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in A\}$$

を A の直径と称する(II. §3)．とくに，A の直径が有限な数であるとき($+\infty$ でないとき)は，A は有界な集合であるといわれる(IV. §2)．

R^n においては，A が有界閉集合ならば，

(＊)　A は任意の正数 ε を与えたとき，直径が ε より小さい有限個部分集合 (ε 細胞) の結びとしてあらわされる

ことをわれわれは知っている(IV. §3, §4)．この定理は一般の距離空間では成立しない．このことは IV 章§4 におけるこの定理の証明が R^n における網目というユークリッド空間に特有なものをもととしていることからも，うなづけるであろう．

こんなところから，とくに，距離空間 D の点集合 A について上の(＊)が成り立つときは，A は**全有界**な集合であるということにする．このことばを使えば，R^n における有界集合は全有界であるということになるわけである．

問 1.　全有界な集合は有界であることを証明する．

問 2.　全有界な集合の部分集合および閉包は全有界であることをたしかめる．

問 3.　全有界な閉集合を ε 細胞に分割するにさいし，各 ε 細胞が閉集合であるようにできることを証明する．

さて，完備空間，全有界という概念が確立されると，こういう道具立てをつかって，距離空間においても Borel-Lebesgue の被覆定理(IV. §5)を証明することができる．

まず，D は完備空間であるとし，D における点列

$$a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(\nu),\ \cdots\cdots$$

の点がすべて全有界な集合 A にぞくしているときは，この点列は，かならず，収束する部分列をもっている．このことの証明は IV 章§3 におけるとまったく同じ手続きでおこなわれる．

この結果を利用すると，IV 章§3 の方法にしたがって，つぎの Cantor の

共通点定理がすぐ証明できる.

F_ν ($\nu=1, 2, \cdots$) が完備空間 D の閉集合で,

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_\nu \supseteq F_{\nu+1} \supseteq \cdots\cdots$$

であるとする. このとき, もし F_1 が全有界ならば

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \neq \theta.$$

さらに, この共通点定理をつかって, 問 3 に注意すれば, Borel-Lebesgue の被覆定理は IV 章 §5 におけると文字どおり同じ方法でおこなわれる:

F が完備空間 D における全有界な閉集合であるとき

$$F \subseteq \bigcup_{\alpha \in M} G_\alpha \qquad (G_\alpha \text{ は開集合})$$

ならば, G_α ($\alpha \in M$) のなかから有限個の開集合 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}$ をえらんで

$$F \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} G_{\alpha_\nu}$$

ならしめることができる.

この定理を距離空間 D 自身について, いいなおせば(§1, 注意 1), つぎのとおりである.

距離空間 D が完備で全有界であるときは, D を被覆する任意の開集合族のなかから, D を被覆するような有限個の開集合をえらぶことができる.

注 意 いまえた定理を '全有界な完備空間はコンパクト (compact) である' ということばであらわすことになっている. コンパクトの概念については, のちに §9 でもう一度ふれる機会がある.

§6. 位相空間 この章にはいってから, いままでに, ユークリッド空間を一般化した距離空間なるものを考えてきた. ところが, IV 章 §6 以後 (VII 章をのぞく) においては, 距離の概念が直接おもてに現われることは少なく, たいてい, 近傍の概念だけで間にあっていることは, 注意深い読者の, すでに, 気づいているところであろう. こんなところから, 距離の概念とははなれて, 近傍をもととし, 距離空間よりももっと一般的な '空間' を考えようという考えがうまれてくる. これがこれから説明しようとする **'位相空間'** (**近傍空間**とも

いう) である.

位相空間を定義するのには, III 章にならって, 開集合から出発するのが便利である.

ここに一つの集合 S と S の部分集合から成る集合族 $\mathfrak{G}$ があって $\mathfrak{G}$ はつぎの三つの条件を満足しているものとする.

O1) $G_\alpha \in \mathfrak{G}$ $(\alpha \in M)$ ならば $\bigcup_{\alpha\in M} G_\alpha \in \mathfrak{G}$

O2) $G_1 \in \mathfrak{G}$, $G_2 \in \mathfrak{G}$, $\cdots$, $G_k \in \mathfrak{G}$ ならば $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k \in \mathfrak{G}$

O3) $\theta \in \mathfrak{G}$, $S \in \mathfrak{G}$

こういう $\mathfrak{G}$ にぞくする S の部分集合を開集合とよぶことに約束したとき, S を位相空間と称する.

注 意 1. $\mathfrak{G}$ は O1), O2), O3) を満足しさえすればよいので, $\mathfrak{G}$ にぞくする S の部分集合がどんなものであるかは, いっさい, 問わない. たとえば $\mathfrak{G}$ は S のあらゆる部分集合からなる集合族でもよい. また, $\mathfrak{G} = \{\theta, S\}$ であってもかまわない.

注 意 2. O1), O2), O3) を満足する $\mathfrak{G}$ を定めて, $\mathfrak{G}$ にぞくする S の部分集合を開集合とよぶことにしたとき, **$\mathfrak{G}$ によって S に位相を与えた**ということがある.

位相空間 S が与えられたとし, これから O1), O2), O3) をもととして, この空間の性質をしらべてみよう. それには, だいたい, III 章以下にのべた筋道を追って行く. ということは, いいかえれば, III 章以下にのべたことのうち O1), O2), O3) だけから導きだされる事柄だけをひろいだして行くということにもなるわけである.

位相空間 S においても, 距離空間の場合とおなじように, S の元は点とよばれ, したがって, S の部分集合 X は点集合とよばれる. また, $S-X$ を X^c であらわして, X^c をかんたんに X の余集合とよぶことにする.

まず, S の点の近傍を定義する(III. §2). すなわち, $x \in S$ のとき $x \in G$ なる開集合 G を点 x の開近傍という. さらに, $x \in G \subseteq X$ なる点集合 X を, 一般に, x の近傍と称し, $V(x)$ であらわす. このようにして定義された近傍が V1), V2), V3), V4) (§3) を満足していることは容易にたしかめることができる. ただし, V5), V6) は上の定義と O1), O2), O3) だけからは出てこない.

つぎは，内点，外点，境界点の定義である(II. §6)． $X\subseteq S$ とし，

i) $V(x)\subseteq X$ なる x の近傍 $V(x)$ があるとき，x は X の内点であるという．もとより，$x\in X$.

ii) X^c の内点を X の外点という．

iii) X の内点でも外点でもない点を X の境界点という．

X の内点全部の集合を X^i であらわし，これをX の内核という．いうまでもなく，$X^i\subseteq X$. なお，X の外点全部の集合 X^{ci} を X の外部，また Xの境界点全部の集合 $X^{ic}\cap X^{cic}$ を X の境界と称する．

問 1. X が開集合ならば $X=X^i$, 逆に $X=X^i$ ならば X は開集合であることをたしかめる．

$X^c\in\mathfrak{G}$ のとき，いいかえれば，X^c が開集合であるとき，X は閉集合であるといわれる．O1)，O2)，O3) とこの定義から，ただちに，

F1) 閉集合の交わりは閉集合である．

F2) 有限個の閉集合の結びは閉集合である．

F3) θ および S は閉集合である．

$X\subseteq F$ なるすべての閉集合 F の交わりを X^a であらわし，これを X の閉包という(III. §4)． F1) により X^a は閉集合である． III 章 §4 におけると同様にして，

A1) $(X\cup Y)^a=X^a\cup Y^a$.

A2) $X\subseteq X^a$

A3) $X^{aa}=X^a$

A4) $\theta^a=\theta$，$S^a=S$.

問 2. X^a の点を X の触点とよぶことにすれば，x が X の触点であるための必要十分条件は x のどの近傍 $V(x)$ をとっても，$V(x)\cap X\neq\theta$ であることである． このことを証明する．

問 3. F が閉集合であるための必要十分条件は $F^a=F$ であることを証明する．

注 意 3. われわれは位相空間論を建設するための公理(仮定)として O1)，O2)，O3) を採用したわけであるが，そうしないで，V1)，V2)，V3)，V4) を公理として出発することも可能である． また，A1)，A2)，A3)，A4) からはじめる行きかたも，よく見られる． いずれにしても，結果としては同等の位相空間がえられるのであるが，この本

ではそこまではたちいらない.

§7. 位相空間の部分空間 A が位相空間 S の点集合, G が S における開集合であるとき, $G'=G\cap A$ は A における開集合とよばれる. A における開集合全部から成る集合族を $\mathfrak{G}'$ であらわすことにすれば, $G\in\mathfrak{G}$ ならば $G\cap A\in\mathfrak{G}'$, 逆に $G'\in\mathfrak{G}'$ ならば $G'=G\cap A$, $G\in\mathfrak{G}$ なる G があるということになる. O1), O2), O3) において G のかわりに G' と書けば, この三つがそのまま成り立つことは明らかであろう. これは, A が一つの位相空間であることを意味する. このような位相空間 A を S の**部分空間**という. A において上のように定めた $\mathfrak{G}'$ によって開集合が定義されることを, S の位相をその部分集合 A に**もちこむ (induce する)** ということばであらわすことがある.

V 章 §1, §2 において被覆定理の前までにのべたことは, 位相空間の部分空間にもそのままあてはまる. よって, ここではくり返さないから, 読者はもう一度その個所をよまれたい.

§8. Hausdorff 空間 位相空間 S における点列

(1) $a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(\nu),\ \cdots\cdots$

の収束はつぎのようにして定義される (IV. §6):

点 a のどの近傍 $V(a)$ をとっても, ほとんどすべての ν に対し

$$a(\nu)\in V(a)$$

であるとき, 点列 (1) は点 a に収束するといい, a をこの点列の極限点と称する. また, このとき,

$$\lim_{\nu} a(\nu)=a, \quad \text{または} \quad a(\nu)\to a$$

と書く.

このような定義を与えたとして, つぎにおこる問題は

$$\lim_{\nu} a(\nu)=a, \quad \lim_{\nu} a(\nu)=a', \quad a\neq a'$$

なることが生じうるか否かである. これに対しては, IV 章 §6 においては, つぎ

の V5) をもとにして，そういうことの生じないこと，すなわち，点列が収束する場合その極限点は一つにかぎることを証明しておいた．

V5)　$x \neq y$ ならば $V(x) \cap V(y) = \theta$ なるごとき x の近傍 $V(x)$ と y の近傍 $V(y)$ とが存在する．

距離空間，とくにユークリッド空間では，V5) の成り立つことが証明されるが，位相空間では V5) は，一般には，成り立たない．すなわち，O1)，O2)，O3) だけからは V5) は出てこないのである．そういうところから，とくに，V5) の成り立つような位相空間を **Hausdorff (ハウスドルフ) 空間** とよぶことになっている．

なお，ついでながら，つぎの V6) (VII. § 4) の成り立つような位相空間 S を正則空間とよんでいる：

V6)　S のどの点 x のどの近傍 $V(x)$ を与えても $(U(x))^a \subseteq V(x)$ なる x の近傍 $U(x)$ が存在する．

距離空間は正則空間であることは明らかであろう (§ 3)．

問 1.　Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff 空間，正則空間の部分空間は正則空間であることをたしかめる．

問 2.　正則空間において，つぎのことを証明する：F が閉集合，$x \notin F$ ならば $F \subseteq G$，$x \in G'$，$G \cap G' = \theta$ なる開集合 G，G' が存在する．また，逆に，このことが成り立つような位相空間は正則であることを証明する．

§ 9.　コンパクト位相空間　位相空間は距離の概念とは無関係である．したがって，位相空間の点集合について有界とか全有界とかいうことは意味をなさない．よって，ユークリッド空間や距離空間のときのように，これらの概念をつかって Borel-Lebesgue の被覆定理に類したものを導きだすわけにいかないことになる．

位相空間の場合，どういう仮定をもうければ被覆定理を証明できるかという問題も興味ある問題ではあるが，ここではそういう問題にはたちいらないで，いわば天下り式に，つぎのような定義を設けることにする：

位相空間 S において

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in M} G_\alpha$$

なる開集合の族 $\{G_\alpha | \alpha \in M\}$ があれば，いつでも，有限個の G_{α_1}, G_{α_2}, …, G_{α_k} をえらんで，$S \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} G_\alpha$ ならしめうるとき，S は**コンパクト(compact)**であるという．

問 1. コンパクト位相空間 S の部分空間 F が閉集合ならば F はコンパクト位相空間であることを証明する．

問 2. Hausdorff 空間 S の部分空間 S' がコンパクトならば S' は閉集合であることを証明する．

コンパクトという概念を確立した上は，V 章でのべた定理のうち，‘有界閉集合’ という言葉の現われる定理において，‘有界閉集合’ を ‘コンパクト位相空間’ ということばにおきかえると，定理はそのまま成立する．

問 3. F_α $(\alpha \in M)$ がコンパクト位相空間 S の閉集合であるとする．このとき，もし，F_α のなかから有限個の F_{α_1}, F_{α_2}, …, F_{α_n} をどうえらんでも $\bigcap_{\nu=1}^{k} F_{\alpha_\nu} \neq \theta$ ならば $\bigcap_{\alpha \in M} F_\alpha \neq \theta$ （有限交差の定理）．

問 4. 位相空間 S で有限交差の定理（問 3）が成り立てば S はコンパクト空間であることを証明する．

§10. 位相空間の連続写像

f は位相空間 S から位相空間 S' のなかへの写像であるとする． 以下，V 章のあとをたどって，位相空間の連続写像についての定義や定理のおもなものをならべておく． 定理の証明法は V 章におけると同様である．

$x \in S$ とし，x の f による像 $f(x)$ （$f(x)$ はもとより S' の点である）の任意の近傍 $V'(f(x))$ を与えたとき

$$(1) \quad f(V(x)) \subseteq V'(f(x))$$

なるごとき x の近傍 $V(x)$ がいつでも存在するとき，写像 f は点 x で連続であるという．（1）は，また，

$$V(x) \subseteq f^{-1}(V'(f(x)))$$

と書いても同じことである（V. §3）．

とくに，f が S の各点で連続であるときは，f は S で連続な写像であると

いわれる(V. §4).

f は，やはり，位相空間 S から位相空間 S' のなかへの写像，g は $f(S)$ から位相空間 S'' のなかへの写像であるとする．このとき，もし f が S の点 x で連続，g が S' の部分空間 $f(S)$ の点 $f(x)$ で連続ならば，S から S'' のなかへの写像 $g\circ f$ は x において連続である(V. §3).

f が S で連続であるための必要十分条件は S' の開集合(閉集合)の f による原像が開集合(閉集合)であることである(V. §4).

f がコンパクト位相空間 S から位相空間 S' のなかへの連続写像ならば S' の部分空間 $f(S)$ はコンパクト位相空間である(V. §4).

§11. 連結位相空間 位相空間 S がたがいに交わらない空でない二つの閉集合の結びとして表わしえないとき，S は連結空間であるという．すなわち，

$$S=F_1\cup F_2,\ F_1\cap F_2=\theta,\ F_1\neq\theta,\ F_2\neq\theta$$

なる閉集合 F_1, F_2 が決してないとき，S は連結であるというわけである(VI. §1).

連結位相空間についての定理のうち二，三をここに書いておく．証明は VI 章における類似の定理の場合と同様である．

S が連結空間で，$A\subseteq S$, $A\neq\theta$, $A^c\neq\theta$ ならば A の境界点が存在する．

問 この定理の証明をこころみる(VI. §1 にならう).

一般に，位相空間は連結な部分空間(成分)の結びとしてあらわすことができる(VI. §3).

f が位相空間 S から位相空間 S' のなかへの連続写像であるとき，S が連結ならば S' の部分空間 $f(S)$ も連結である(VI. §4).

§12. むすび われわれは，II 章からはじめて，VII 章にいたるまでの間，ユークリッド空間の点集合についてのべてきた．つづいて，この VIII 章においてユークリッド空間をその特別な場合とするような距離空間なるものを考えた．

そののち，さらに進んで，距離空間よりもっと一般的な位相空間なるものにまでいたった． この間の進みかたを逆の向きに，一般的なものから特殊なものへと書いてみるとつぎのごとくなる．

位相空間→Hausdorff 空間→正則空間→距離空間→完備空間→連結完備空間→ユークリッド空間． こうしてみると，まず，まっさきに，もっとも一般的な位相空間を論じ，それに新たな仮定（公理）をつけ加えることによって，漸次，ユークリッド空間におよぶという行きかたが考えられる．事実，極限の概念を基礎とする数学解析においては，‘近い’とか‘近くにある’とかいうことが根本なのであるから，‘近傍’の概念だけで建設される位相空間を根本的なものと考え，ユークリッド空間をその特別な場合として扱うという方針はきわめて自然な行きかたといってもよいであろう． この本では位相空間論のほんの一端だけにふれるにとどめた．興味ある人は巻末における参考書によって先に進まれたい．

参考書について

(1)　辻　正次　集合論 (共立出版, 1934)

(2)　能代　清　極限論と集合論 (岩波書店, 1944)

この二つとも, 点集合についての部分は内容的には本書と大同小異であるが, 書きかたには相当相異がある. なお, (1) には Jordan の曲線定理や次元の問題についての付録がついている.

'点集合論' と銘をうった本はあまりない.

(3)　稲垣　武　点集合論 (岩波書店, 1949)

は, じつは, 位相空間を扱った高級な本である. 位相空間論の専門書としては

(4)　河野伊三郎　位相空間論 (共立出版, 1954)

(5)　小松醇郎　位相空間論 (岩波書店, 1947)

がある. (4) は初学者にとって手ごろであろう.

なお, このほか, 位相空間をその一部として扱っている本としては

(6)　中山　正　集合・位相・代数系 (至文堂, 1949)

(7)　吉田耕作・河田敬義・岩村　聯　位相解析の基礎 (岩波書店, 1960)

(8)　アレクサンドロフ (三瓶・千葉訳)　位相幾何学 I (共立出版, 1957)

外国の本でも, 古いものをのぞけば, 本書でのべたような点集合論だけを扱ったものはあまり見あたらない. 位相空間論についての本としては

(9)　Bourbaki, Topologie générale (第1分冊第1章第2章, 1951)

が新しいところであろう. この本はこの著者の Éléments de mathématiques という叢書風の本の分冊の一つである.

さらに, もっぱら, 位相空間論を詳説した大部の本としては

(10)　Kuratowski, C. Topologie (I 1933, II 1951)

がある.

なお,

(11)　Hausdorff, Mengenlehre (第3版, 1935)

には一般集合論とともに位相空間についての相当詳しい説明が書いてある.

最後に, 一般集合論については

(13)　赤　摂也　集合論入門 (新数学シリーズ, 培風館, 1957)

が手ごろな参考書である.

問　の　答

I. 集　　合

§1. **問 1.** 放物線 $y^2=x$ の内部の点全部の集合. **問 2.** xy-平面の円周 $x^2+y^2=1$ を導線にもつ直円筒の内部の点全部の集合. **問 3.** $\{(x, y) | x>0, y>0\}$.

§3. **問 1.** $A\subseteq B$ だから, $x\in A$ なら $x\in B$. しかるに, $B\subseteq C$ だから $x\in B$ なら $x\in C$. すなわち, $x\in A$ なら $x\in C$. **問 2.** 問1により $A\subseteq C$ だから, $A\subseteq C$, $C\subseteq A$ から $A=C$. 同じく問1により, $C\subseteq A\subseteq B$ から $C\subseteq B$. 一方 $B\subseteq C$ だから $B=C$.

§4. **問 1.** $x\in A\cup B$ ならば $x\in A$ か $x\in B$. $x\in A$ なるときは $A\subseteq A'$ だから $x\in A'$. $A'\subseteq A'\cup B'$ だから $x\in A'$ なら $x\in A'\cup B'$. 同様に $x\in B$ なるときも $x\in A'\cup B'$. いずれにしても, $x\in A\cup B$ ならば $x\in A'\cup B'$. **問 2.** $A\subseteq B$ であるときは, $x\in A$ ならば $x\in B$. ゆえに $x\in A\cap B$. すなわち, $A\subseteq A\cap B$. 一方 $A\cap B\subseteq A$ だから $A\cap B=A$. 逆に, $A\cap B=A$ なるときは, $x\in A$ ならば $x\in A\cap B$. よって $x\in B$. すなわち, $x\in A$ なら $x\in B$. **問 3.** $\theta\subseteq A$ だから, (3) により, $A\cup\theta=A$, (5) により $A\cap\theta=\theta$. **問 4.** $x\in A\cap B$ ならば $x\in A$, $x\in B$. しかるに, $A\subseteq A'$ だから $x\in A'$, また $B\subseteq B'$ だから $x\in B'$. よって, $x\in A\cap B$ なら $x\in A'$, $x\in B'$, すなわち $x\in A'\cap B'$. **問 5.** i), ii) は定義から明らか. iii) $x\in A\cup B$ ならば $x\in A$ か $x\in B$. $x\in A$ のときは $x\in A\cup(B-A)$. $x\in B$ のとき, もし $x\in A$ なら, すでに $x\in A\cup(B-A)$ がわかっている. $x\in B$, $x\notin A$ のときは $x\in B-A$. よって, $x\in A\cup(B-A)$. いずれにしても $x\in A\cup B$ なら $x\in A\cup(B-A)$. すなわち, $A\cup B\subseteq A\cup(B-A)$. しかるに, $A\subseteq A$, $B-A\subseteq B$ だから, 問1により $A\cup(B-A)\subseteq A\cup B$. iv) $x\in B-A$ ならば $x\in B$, $x\notin A$. しかるに, $B\subseteq A\cup B$ だから $x\in A\cup B$, $x\notin A$. よって $x\in(A\cup B)-A$. すなわち, $B-A\subseteq(A\cup B)-A$. 逆に, $x\in(A\cup B)-A$ ならば $x\in A\cup B$, $x\notin A$. よって $x\in A$ か $x\in B$ で, しかも $x\notin A$. ゆえに, $x\in B$, $x\notin A$. よって $x\in(B-A)$. すなわち, $(A\cup B)-A\subseteq B-A$.

§5. **問 1.** $x\in(A\cap B)\cap C$ ならば $x\in A\cap B$, $x\in C$. しかるに, $x\in A\cap B$ なら $x\in A$, $x\in B$ だから, けっきょく $x\in(A\cap B)\cap C$ なら $x\in A$, $x\in B$, $x\in C$. よって $x\in A$, $x\in B\cap C$. ゆえに, $x\in A\cap(B\cap C)$. すなわち, $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$. 同様にして $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$. **問 2.** $x\in A\cup(B\cap C)$ なら $x\in A$ か $x\in B\cap C$. $x\in A$ のときは $x\in A\cup B$, $x\in A\cup C$ だから $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. また, $x\in B\cap C$ のと

きは $x\in B$, $x\in C$. ゆえに $x\in A\cup B$, $x\in A\cup C$. よって $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. すなわち, $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 逆に, $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ なら $x\in A\cup B$, $x\in A\cup C$. $x\in A\cup B$ だから $x\in A$ か $x\in B$. $x\in A$ なるときは $x\in A\cup(B\cap C)$. $x\notin A$ なるときは $x\in B$. しかるに, $x\in A\cup C$ だから $x\in A$ か $x\in C$. しかも, $x\notin A$ なのだから, どうしても, $x\in C$. よって, $x\in B$, $x\in C$, すなわち $x\in B\cap C$. ゆえに, $x\in A\cup(B\cap C)$. よって, $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$. **問 3.** $x\in C-(A\cap B)$ ならば $x\in C$, $x\notin A\cap B$. ゆえに, $x\in C$ で, しかも $x\notin A$ か $x\notin B$. $x\in C$, $x\notin A$ のときは $x\in C-A$. したがって, $x\in(C-A)\cup(C-B)$. また, $x\in C$, $x\notin B$ のときも同様に $x\in(C-A)\cup(C-B)$. よって $C-(A\cap B)\subseteq(C-A)\cup(C-B)$. 逆に, $x\in(C-A)\cup(C-B)$ ならば $x\in C$, $x\notin A$ か $x\in C$, $x\notin B$. よって, $x\in C$, $x\notin A\cap B$. ゆえに $x\in C-(A\cap B)$. すなわち, $(C-A)\cup(C-B)\subseteq C-(A\cap B)$. **問 4.** 問 3 において $C=A\cup B$ とおく. **問 5.** $A\cap B\subseteq A$ だから §4 (3) により $A\cup(A\cap B)=A$. $A\subseteq A\cup B$ だから §4 (5) により $A\cap(A\cup B)=A$.

§6. 問. $\left(-\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$ および $\{0\}$.

§7. 問 2. $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}=A$, $\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}=A$ に注意. **問 3.** $\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{i+j-1}=\bigcap_{\nu=1}^{\infty}A_{\nu}$ に注意.

§8. 問 1. $|y|<1$. $0\leqq y<1$ のとき $x=\dfrac{y}{1-y}$, $-1<y<0$ のとき $x=\dfrac{y}{1+y}$ とおけば $y=\dfrac{x}{1+|x|}$ だからこの写像は $(-\infty\,;\ +\infty)$ から $(-1\,;\ 1)$ の上への写像. $x_1\neq x_2$ とし, $x_1x_2<0$ ならば $\dfrac{x_1}{1+|x_1|}\cdot\dfrac{x_2}{1+|x_2|}<0$. $x_1x_2\geqq0$ ならば $\dfrac{x_1}{1+|x_1|}-\dfrac{x_2}{1+|x_2|}=\dfrac{x_1-x_2}{(1+|x_1|)(1+|x_2|)}\neq0$. いずれにしても $\dfrac{x_1}{1+|x_1|}\neq\dfrac{x_2}{1+|x_2|}$. **問 3.** 写像 $y=\dfrac{x-a}{b-a}$ による.

§9. 問 1. i) 写像 $y=2x-1$. ii) 写像 $y=x-1$. iii) 写像 $f(2\nu-1)=-\nu+1$, $f(2\nu)=\nu$ による. **問 2.** $A'\subseteq A$ とし A を列の形に書いたものを (2) とする. (2) の項のうち A' にぞくするものを番号順にひろってこれを a_{ν_1}, a_{ν_2}, $\cdots$, a_{ν_k}, $\cdots$ とすれば A' が列の形に書ける. **問 3.** すべての整数の集合は可付番だから, これを $\{a_1, a_2, \cdots, a_\nu, \cdots\}$ とし, $A_\nu=\{(a_\nu,\ y)\,|\,y=a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$ とおけば A_ν は可付番. よって, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}A_\nu$ も可付番. **問 4.** 平面の場合は問 3 と同様. 空間の場合は平面の場合の結果をつかって問 3 と同様にする.

§10. 問 1. $[a\,;\,b]\sim[0\,;\ 1]$, $(a\,;\,b)\sim(0\,;\ 1)$, $[a\,;\,b)\sim[0\,;\ 1)$, $(a\,;\,b]\sim(0\,;\ 1]$, §8 問 1 により $(-\infty\,;\ +\infty)\sim(-1\,;\ 1)$, しかるに $(-1\,;\ 1)\sim(0\,;\ 1)$ だから $(-\infty\,;\ +\infty)\sim(0\,;\ 1)$. **問 2.** 無理数すべての集合は $(-\infty\,;\ +\infty)-Q$ (Q は有理

数すべての集合.）Q は可付番集合だから $(-\infty;+\infty)-Q\sim(-\infty;+\infty)$. 問1により $(-\infty;+\infty)$ の濃度は $\aleph$.

II. 点集合と距離

§1. 問2. $A\cap B=\theta$ から $(A\cap B)\cup B^c=B^c$. よって, $(A\cup B^c)\cap(B\cup B^c)=B^c$. しかるに, $B\cup B^c=R^n$ だから $A\cup B^c=B^c$, すなわち, $A\subseteq B^c$.　　問3. $A\cap B=A$ だから $A^c\cup B^c=A^c$, よって, $B^c\subseteq A^c$.

§2. 問1. $0\leqq\lambda\leqq 1$, $a_i\leqq x_i\leqq b_i$, $a_i\leqq y_i\leqq b_i$ ならば $a_i\leqq x_i+\lambda(y_i-x_i)\leqq b_i$.

§3. 問1. $\mathrm{dist}(a,\ b)=\left[\sum_{i=1}^n|a_i-b_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^n|0-(b_i-a_i)|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{dist}(0,\ b-a)$.　　問2. $\mathrm{dist}(\alpha x,\ \alpha y)=\left[\sum_{i=1}^n|\alpha x_i-\alpha y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^n|\alpha|^2|x_i-y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\left[\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\,\mathrm{dist}(x,\ y)$.
問3. x, y をこの集合の任意の2点とすれば $\mathrm{dist}(x,\ y)\leqq\mathrm{dist}(x,a)+\mathrm{dist}(a,y)<2\rho$. また, $x_1=a_1-\rho+\frac{\varepsilon}{2}$, $x_i=a_i$ $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$, $y_1=a_1+\rho-\frac{\varepsilon}{2}$, $y_i=a_i$ $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ とすれば, x, y はこの集合にぞくして, $\mathrm{dist}(x,\ y)=2\rho-\varepsilon$. ゆえに直径は 2ρ.

§4. 問1. i) $x\in A$, $\mathrm{dist}(b,\ x)<\mathrm{dist}(b,A)+\varepsilon$ なる x をとれば, $\mathrm{dist}(a,A)\leqq\mathrm{dist}(a,\ x)\leqq\mathrm{dist}(a,\ b)+\mathrm{dist}(b,\ x)<\mathrm{dist}(a,\ b)+\mathrm{dist}(b,\ A)+\varepsilon$.　すなわち, $\mathrm{dist}(a,\ A)<\mathrm{dist}(a,\ b)+\mathrm{dist}(b,A)+\varepsilon$.　ii) $x\in A$, $\mathrm{dist}(a,x)<\mathrm{dist}(a,A)+\frac{\varepsilon}{2}$, $y\in B$, $\mathrm{dist}(a,\ y)<\mathrm{dist}(a,\ B)+\frac{\varepsilon}{2}$ なる x, y をとれば, $\mathrm{dist}(a,\ x)+\mathrm{dist}(a,\ y)\geqq\mathrm{dist}(x,\ y)\geqq\mathrm{dist}(A,\ B)$. よって $\mathrm{dist}(a,\ A)+\mathrm{dist}(a,\ B)+\varepsilon>\mathrm{dist}(A,\ B)$.
問2. $x\in A$, $\mathrm{dist}(x,\ b)<\mathrm{dist}(b,\ A)+\varepsilon$ なる x をとれば, $\mathrm{dist}(a,b)\leqq\mathrm{dist}(a,x)+\mathrm{dist}(x,\ b)<\rho+\mathrm{dist}(x,\ b)$ から $\mathrm{dist}(a,\ b)<\rho+\mathrm{dist}(b,\ A)+\varepsilon$. よって, $\mathrm{dist}(a,\ b)\leqq\rho+\mathrm{dist}(b,\ A)$. つぎに, $0<\lambda\,\mathrm{dist}(a,\ b)=\rho'<\rho$ とし $x=a+\lambda(b-a)$ とおけば $\mathrm{dist}(a,\ x)=\lambda\,\mathrm{dist}(a,\ b)=\rho'<\rho$, $\mathrm{dist}(b,\ x)=(1-\lambda)\,\mathrm{dist}(a,\ b)$. よって, $x\in A$, $\mathrm{dist}(a,\ b)=\mathrm{dist}(a,\ x)+\mathrm{dist}(b,\ x)\geqq\rho'+\mathrm{dist}(b,\ A)$. ここで $\rho'\to\rho$ とすれば $\mathrm{dist}(a,\ b)\geqq\rho+\mathrm{dist}(b,\ A)$.

§6. 問1. a が A の内点ならば $V(a;\rho)\subseteq A$ なる a の ρ 近傍がある. よって, $x\in A^c$ ならば $\mathrm{dist}(a,\ x)\geqq\rho$. よって, $\mathrm{dist}(a,\ A^c)\geqq\rho>0$. 逆に, $\mathrm{dist}(a,\ A^c)=\rho>0$ ならば $V(a;\rho)\subseteq A$.　　問2. 問1による.　　問3. $a\in A^i$ ならば $V(a)\subseteq A$ なる a の球近傍 $V(a)$ がある. $V(a)\subseteq A\subseteq B$. よって, $a\in B^i$.　　問4. $A^i\subseteq A$ から $A^{ii}\subseteq A^i$（問3）.　$x\in A^i$, $V(x)\subseteq A$ とし, $y\in V(x)$ とすれば, V' 3) により $V(y)\subseteq V(x)$ なる $V(y)$ がある.　すなわち, $V(y)\subseteq A$. よって, $y\in A^i$.　ゆえに, $V(x)\subseteq A^i$, すなわち, $x\in A^{ii}$. よって $A^i\subseteq A^{ii}$.　　問5. $(A\cup A^l)^c=A^c\cap A^{lc}$

$=A^c\cap(A^{ic}\cap A^{cic})^c=A^c\cap(A^{icc}\cup A^{cicc})=A^c\cap(A^i\cup A^{ci})=(A^c\cap A^i)$ $\cup(A^c\cap A^{ci})=\theta\cup A^{ci}=A^{ci}$.

III. 開集合と閉集合

§1. 問 1. $\mathrm{dist}(a, x)>\rho$ とし, $\rho'=\mathrm{dist}(a, x)-\rho$ とおけば $V(x;\rho')\subseteq\{x \mid \mathrm{dist}(a, x)>\rho\}$. なぜなら, $y\in V(x;\rho')$ とすれば $\mathrm{dist}(y, a)\geqq\mathrm{dist}(a, x)-\mathrm{dist}(x, y)>\mathrm{dist}(a, x)-\rho'=\rho$. **問 2.** A が開集合ならば $A=A^i$. よって, $A\cap A^l=A^i\cap(A^{ic}\cap A^{ec})=(A^i\cap A^{ic})\cap A^{ec}=\theta\cap A^{ec}=\theta$. 逆に, $A\cap A^l=\theta$ ならば $A\cap A^{ic}\cap A^{cic}=\theta$ だから $A^c\cup A^{icc}\cup A^{cicc}=R^n$, すなわち, $A^c\cup A^i\cup A^{ci}=R^n$. よって, $A\cap(A^c\cup A^i\cup A^{ci})=A\cap R^n$. 左辺$=(A\cap A^c)\cup(A\cap A^i)\cup(A\cap A^{ci})=\theta\cup(A\cap A^i)\cup\theta=A\cap A^i=A^i$, 右辺$=A$. よって $A^i=A$.

§3. 問 1. II 章§6 問 5 により $(A\cup A^l)^c=A^{ci}$ で A^{ci} は開集合. **問 2.** $A=A\cup A^l$ ならば問 1 により A は閉集合. 逆に, A が閉集合ならば A^c は開集合. よって, $A^c=A^{ci}$ だから, 問 1 の答により $(A\cup A^l)^c=A^c$. ゆえに $A\cup A^l=A$. **問 3.** $G-F=G\cap F^c$. ここに F^c は開集合だから, O 2) により $G-F$ は開集合. $F-G=F\cap G^c$, ここに G^c は閉集合だから F 2) により $F-G$ は閉集合.

§4. 問 1. $A^{ac}=(A\cup A^l)^c=(A^{ec})^c=A^e$. **問 2.** $a\in A^a$ ならば, ε が任意の正数なるとき, $A\cap V(a;\varepsilon)\neq\theta$. $x\in A\cap V(a;\varepsilon)$ とすれば $\mathrm{dist}(a, x)<\varepsilon$. よって, $\mathrm{dist}(a, A)<\varepsilon$. したがって, $\mathrm{dist}(a, A)=0$. つぎに, $\mathrm{dist}(a, A)=0$ とする. $V(a)$ を a の任意の近傍とし, $V(a;\varepsilon)\subseteq V(a)$ なる $V(a;\varepsilon)$ をとり, $x\in A$, $\mathrm{dist}(a, x)<\varepsilon$ なる x をとれば, $x\in V(a;\varepsilon)$, よって $x\in V(a)$. よって, $a\in A^a$. **問 4.** $A^l=A^{ic}\cap A^{cic}=A^{ca}\cap(A^c)^{ca}=A^{ca}\cap A^a=A^{ic}\cap A^a=A^a-A^i$. **問 5.** $x\in G$, $x\in A^a$ とし, $V(x)$ を x の近傍とすれば $V(x)\cap G$ も x の近傍である. よって, $(V(x)\cap G)\cap A\neq\theta$. すなわち, $V(x)\cap(G\cap A)\neq\theta$. よって, $x\in(G\cap A)^a$.

§5. 問 1. $(A-\{x\})^a\subseteq(B-\{x\})^a$. **問 2.** A は自己稠密な集合, G は開集合とする. $x\in A\cap G$ とし, $V(x)$ を x の任意の近傍とすれば, $V(x)\cap G$ も x の近傍である. よって, $y\in A-\{x\}$, $y\in V(x)\cap G$ なる y をとれば $y\in V(x)\cap(A\cap G-\{x\})$.

§6. 問. F^c は開集合だから $F^{ci}=F^c$. ゆえに, F が疎ならば $F^{ca}=F^{cia}=R^n$. $F^{ca}=F^{ic}$ だから $F^{ic}=R^n$. よって, $F^i=\theta$. いまの証明を逆にたどれば逆も証明される.

IV. 被 覆 定 理

§1. 問 1. $a(\nu)$ のなかには a とことなるものが無限にたくさんある. ε を任意の正数とするとき, ほとんどすべての $a(\nu)$ について $\mathrm{dist}(a(\nu), a)<\varepsilon$ だから $a(\nu)\in V(a;\varepsilon)$

で $a(\nu)\neq a$ なる $a(\nu)$ がある.

§6. 問. かりに $V(x)$ のなかに A の点が有限個しかないものとし，これを $a(1)$, $a(2)$, …, $a(k)$ とする. V 5) により，$V(a(i))\cap V_i(a)=\theta$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ なる $V(a(i))$, $V_i(a)$ をとり，$V(a)=\bigcap_{i=1}^{k}V_i(a)$ とすれば，$A\cap V(a)=\theta$ となり仮定にそむく.

V. 連　続　写　像

§4. 問 1. $x\in B$, $f(V(x;A))\subseteq V'(f(x))$ としておく. $V(x;A)\cap B$ は x の B 近傍だからこれを $V(x;B)$ と書けば $f_B(V(x;B))=f(V(x;B))\subseteq f(V(x;A))$. よって，$f_B(V(x;B))\subseteq V'(f(x))=V'(f_B(x))$.

§6. 問. ε を任意の正数としておく. i)（必要）まず，写像列（1）が A で f に一様収束するとし，$\nu\geqq\nu_0$ ならば A のすべての点 x で $\mathrm{dist}(f_\nu(x), f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$ であるとする. $\nu_1\geqq\nu_0$, $\nu_2\geqq\nu_0$ ならば $\mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x), f_{\nu_2}(x))\leqq\mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x), f(x))+\mathrm{dist}(f(x), f_{\nu_2}(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. ii)（十分）逆に，$A$ のすべての点 x で $\nu_1\geqq\nu_0$, $\nu_2\geqq\nu_0$ ならば $\mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x), f_{\nu_2}(x))<\frac{\varepsilon}{2}$ であるとする. A の個々の点 x において点列 $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_\nu(x)$, … は基本列であるから収束する (IV. §1). よって，その極限点を $f(x)$ であらわす；$\lim\limits_{\nu} f_\nu(x)=f(x)$. $\nu_1\geqq\nu_0$, $\nu_2\geqq\nu_0$ としておけば，A のすべての点 x で $\mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x), f_{\nu_2}(x))<\frac{\varepsilon}{2}$ だから，$\nu_2\to+\infty$ ならしめれば $\mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x), f(x))=\lim\limits_{\nu_2}\mathrm{dist}(f_{\nu_1}(x), f_{\nu_2}(x))\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

§7. 問 1. $|f_i(x)-f_i(y)|\leqq\mathrm{dist}(f(x), f(y))\leqq\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(y)|$ に注意. 問 2. II 章 §4 問 1 の i) をつかって，例 2 のようにする.

VI. 連　結　集　合

§1. 問 1. $F_1=C\cap\left[0;\frac{1}{3}\right]$, $F_2=C\cap\left[\frac{2}{3};1\right]$ とおけば $C=F_1\cup F_2$, $F_1\neq\theta$, $F_2\neq\theta$, $F_1\cap F_2=\theta$. 問 2. A が連結集合であるとき，かりに，a が A の孤立点であるとする. $F_1=\{a\}$, $F_2=A-\{a\}$ とおけば $A=F_1\cup F_2$, $F_1\neq\theta$, $F_2\neq\theta$, $F_1\cap F_2=\theta$.

§2. 問 1. 数学的帰納法. 問 2. $(\alpha;+\infty)=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(\alpha;\alpha+\nu)$, $(-\infty;\alpha)=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(-\nu;\alpha)$.

§6. 問 1. 連続体は定義により閉集合，また §1 問 2 により自己稠密. 問 2. A が有界な連続体ならば $f(A)$ は有界閉集合 (V. §4). $f(A)$ は §4 により連結集合. 問 3. $(a;b)$ については例 3 を見よ. $x\in V(a;\rho)$, $y\in V(a;\rho)$ とすれば x と a とを結ぶ線分，a と y を結ぶ線分をつなぎ合わせれば $V(a;\rho)$ のなか

にある折れ線になる．この折れ線は連結集合である（例 2)．

VII. 開集合・閉集合の構造

§2. 問. $x \in A^a$ ならば $\mathrm{dist}(x, A)=0$ だから (III. §4 問 2)，$x \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{\nu}\right)$. 逆に，$x \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ならばどの自然数 ν に対しても $\mathrm{dist}(x, A)<\frac{1}{\nu}$. よって，$\mathrm{dist}(x, A)=0$, すなわち $x \in A^a$.

§3. 問. $A^k \subseteq (A \cup B)^k$, $B^k \subseteq (A \cup B)^k$ だから $A^k \cup B^k \subseteq (A \cup B)^k$. つぎに，$x \in (A \cup B)^k$ ならば $x \in A^k$ か $x \in B^k$ かを示す．かりに，$x \notin A^k$, $x \notin B^k$ とすれば x の近傍 $V_1(x)$, $V_2(x)$ があって $V_1(x) \cap A$, $V_2(x) \cap B$ が可付番であるはずである．$V(x) = V_1(x) \cap V_2(x)$ とおけば $V(x) \cap (A \cup B)$ が可付番となり，$x \notin (A \cup B)^k$ となり仮設にそむく．

VIII. 距離空間と位相空間

§1. 問 2. D 3) により $\mathrm{dist}(x, y)+\mathrm{dist}(y, x) \geqq \mathrm{dist}(x, x)$. D′ 1) により $\mathrm{dist}(x, x)=0$. また，D 2) により $\mathrm{dist}(y, x)=\mathrm{dist}(x, y)$. よって，$2\,\mathrm{dist}(x, y) \geqq 0$, すなわち，$\mathrm{dist}(x, y) \geqq 0$. 問 3. D 2) の証明：D′ 2) において $z=x$ とおけば $\mathrm{dist}(x, x)+\mathrm{dist}(y, x) \geqq \mathrm{dist}(x, y)$. よって，D′ 1) により，$\mathrm{dist}(y, x) \geqq \mathrm{dist}(x, y)$. x と y とを交換すれば $\mathrm{dist}(x, y) \geqq \mathrm{dist}(y, x)$. よって，$\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$. D 3) の証明：D 2) により $\mathrm{dist}(y, z)=\mathrm{dist}(z, y)$ だから D′ 2) から $\mathrm{dist}(x, z)+\mathrm{dist}(z, y) \geqq \mathrm{dist}(x, y)$. ここで y と z とを交換すれば $\mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geqq \mathrm{dist}(x, z)$. D 1) は問 2 により D′ 1)，D 2)，D 3) から導かれる．

§2. 問 2. $\alpha>0$, $\beta>0$ のときを証明すればよい．$f(x)=\alpha x-\frac{\alpha^p}{p}-\frac{x^{p'}}{p'}$ とおけば $f'(x)=\alpha-x^{p'-1}$. よって，$f'(x)=0$ なるときは $x=\alpha^{\frac{1}{p'-1}}=\alpha^{p-1}$. $f''(\alpha^{p-1})<0$ だから，$f(\alpha^{p-1})$ は $[0;\ +\infty)$ における $f(x)$ の最大値．しかるに，$f(\alpha^{p-1})=\alpha\cdot\alpha^{p-1}-\frac{\alpha^p}{p}-\frac{\alpha^{(p-1)p'}}{p'}=\alpha^p-\frac{1}{p}\alpha^p-\frac{p-1}{p}\alpha^p=0$. よって，$x \geqq 0$ ならば $\alpha x-\frac{\alpha^p}{p}-\frac{x^{p'}}{p'} \leqq 0$.

§4. 問 1. V. §6 問による．

§6. 問 2. (必要)：$y \in X^a$ とし，かりに，$V(x) \cap X = \theta$ なる x の近傍 $V(x)$ があるとする．G を $x \in G \subseteq V(x)$ なる開集合とすれば，$G \cap X = \theta$ だから，$X \subseteq G^c$. しかるに G^c は閉集合，よって，$X^a \subseteq G^c$. したがって，$x \in G^c$. これは $x \in G$ と矛盾する．(十分)：$x \notin X^a$ であるとする．$x \in X^{ac}$. X^{ac} は開集合だからこれは x の一つの近傍である．これを $V(x)$ であらわせば $X \cap V(x) = \theta$.

§8. 問 2. F は正則空間の閉集合で $x \notin F$ とする．F^c は開集合で $x \in F^c$ だか

ら F^c は x の近傍である．よって，$(U(x))^a \subseteq F^c$ なる x の近傍 $U(x)$ が存在する．$G=(U(x))^{ac}$, $G'=U(x)$ とおけば，$F=F^{cc}\subseteq(U(x))^{ac}=G$. $x\in G'$. $G\cap G'=\theta$.（逆）: $V(x)$ を x の任意の近傍とする．$F=(V(x))^c$ とおけば $x\notin F$. $F\subseteq G$, $x\in G'$, $G\cap G'=\theta$ なる開集合 G, G' をとれば，$G'\subseteq G^c$. よって，$G'^a\subseteq G^{ca}=G^c$. しかるに，$G^c\subseteq F^c=V(x)$. ゆえに $G'=U(x)$ とおけば $(U(x))^a\subseteq V(x)$.

§9. **問 1.**　$F\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha'$, $G_\alpha'=G_\alpha\cap F$（G_α は開集合）であるとする．$G=F^c$ とおけば $S\subseteq G\cup(\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha)$ であるから，G および G_α のなかから有限個 G, G_{α_1}, G_{α_2}, $\cdots$, G_{α_k} をえらんで $S\subseteq G\cup G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}\cup\cdots\cup G_{\alpha_k}$ ならしめうる．よって，$F=F\cap S\subseteq(F\cap G)\cup(F\cap G_{\alpha_1})\cup(F\cap G_{\alpha_2})\cup\cdots\cup(F\cap G_{\alpha_k})$, すなわち，$F\subseteq G_{\alpha_1}'\cup G_{\alpha_2}'\cup\cdots\cup G_{\alpha_k}'$.

問 2.　IV. §8の定理（63ページ）の証明にならう．　**問 3.**　IV. §8の2番目の定理の証明にならう．　**問 4.**　$S\subseteq\bigcup_{\alpha\in M}G_\alpha$ とする．$\bigcap_{\alpha\in M}G_\alpha{}^c=\theta$ だから，$\bigcap_{\nu=1}^k G_{\alpha_\nu}^c=\theta$ なる $G_{\alpha_1}^c$, $G_{\alpha_2}^c$, $\cdots$, $G_{\alpha_k}^c$ がなければならない．よって，$S=\bigcup_{\nu=1}^k G_{\alpha_\nu}$.

索　　引

J

K

L

M

N

P

R

著者略歴

吉田洋一（よしだ よういち）

1923年 東京大学理学部数学科卒
第一高等学校教授
1928～30年 フランス留学
1930年 北海道大学教授
1949年 立教大学理学部教授
1964年 立教大学名誉教授
1965年 埼玉大学教授
1969年 埼玉大学退職

主要著書

函数論 第2版（岩波書店）
実変数函数論概要（共立出版）
微分積分学序説（培風館）
微分積分学（培風館）
数学序説（赤攝也氏と共著，培風館）
数学辞典（アテネ文庫）
初等数学辞典（アテネ文庫）
零の発見（岩波新書）
科学と方法（ポアンカレ原著，岩波文庫）
人間算術（角川書店）
数学の影絵（東和社）
世論調査（西平重喜氏と共著，岩波書店）
数表（吉田正夫氏と共編，培風館）
代数および幾何（河野伊三郎氏と共著，培風館）
ルベグ積分入門（培風館）
数学概論（村田全氏と共著，同文書院）
数学者の眼（講談社）
基礎課程線形代数学（高橋健人氏と共著，培風館）
数学基礎論序説（訳書，培風館）

昭和35年6月30日 初版発行
昭和55年9月30日 初版第19刷発行

新数学シリーズ 17
点集合論入門

著者 吉田洋一
発行者 山本健二
発行所 株式会社 培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256（代表）・振替東京 4-44725
定価 ¥ 1200.

遅美活版組版・斎藤印刷・三水舎製本

3341-0317-6955